

А. Н. МАЛАХОВ

**КУМУЛЯНТНЫЙ
АНАЛИЗ
СЛУЧАЙНЫХ
НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ
И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

А. Н. МАЛАХОВ

КУМУЛЯНТНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ



Москва «Советское радио» 1978

Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М., «Сов. радио», 1978, 376 с.

В книге подробно и систематически изложен кумулянтный подход к описанию и анализу произвольных случайных величин, процессов и их преобразований. Основное внимание уделено описанию негауссовых процессов и анализу их нелинейных преобразований.

Даны математическое представление негауссовых переменных, их описание кумулянтными скобками и диаграммами, а также основные уравнения, связывающие средние значения произвольных функций с кумулянтами их аргументов. Рассмотрено представление негауссовых случайных процессов кумулянтными функциями. Подробно описаны марковские процессы и кинетические уравнения для их кумулянтов и кумулянтных функций. Проанализированы линейные преобразования случайных процессов. Подробно рассмотрены нелинейные преобразования случайных процессов, как безынерционные, так и инерционные.

Книга предназначена для широкого круга научно-технических работников, студентов старших курсов и аспирантов, интересующихся приложениями теории случайных процессов к различным статистическим задачам радиофизики, радиотехники и электроники, теории связи, теории автоматического управления и т. п.

50 рис., 31 диаграмма, библи. 77 назв.

Редакция радиотехнической литературы

М $\frac{30401-049}{046(01)-78}$ 42-78

© Издательство «Советское радио», 1978 г.

Раздел I

КУМУЛЯНТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Исследуются свойства кумулянтов негауссовых величин, их статистический смысл и взаимосвязи с моментами. Приводится аппарат кумулянтных скобок, позволяющий существенно упростить оперирование с негауссовыми переменными. Вводятся кумулянтные уравнения, связывающие средние значения произвольных функций с кумулянтами их аргументов. Обсуждаются распределения, обладающие конечным рядом отличных от нуля кумулянтов.

Раздел II

КУМУЛЯНТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вводятся кумулянтные и моментные функции случайных негауссовых процессов и приводится их взаимосвязь. Обсуждаются стационарные процессы и временные характеристики кумулянтных функций. Исследуются спектры негауссовых процессов. Находятся кумулянтные и моментные функции производных и интегралов от случайных процессов.

Подробно обсуждаются марковские негауссовы процессы и их свойства. Выводятся кинетические уравнения для кумулянтов и кумулянтных функций марковских процессов, позволяющие проследить их временную эволюцию.

Раздел III

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вводятся моментные функции и частотные характеристики, представляющие линейную систему. Исследуется преобразование моментных и кумулянтных функций негауссовых процессов линейными системами. Находятся дифференциальные уравнения для моментных и кумулянтных функций выхода линейной системы. Подробно рассматриваются эффекты нормализации и денормализации негауссовых случайных процессов линейными инерционными системами.

Раздел IV

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

С помощью кумулянтных уравнений, обобщающих теорему Прайса на негауссовы переменные, анализируются нелинейные безынерционные преобразования произвольных случайных процессов, преобразования их кумулянтных функций и спектров. Рассматриваются неявные нелинейные преобразования и безынерционное детектирование с обратной связью. Подробно исследуется преобразование сильных как белых, так и гладких шумов нелинейными инерционными системами. Определяются полоса нелинейной инерционной системы и условия, при которых возмущающий шум можно считать белым. В заключение анализируются особенности инерционного детектирования шума.

Section I

CUMULANT DESCRIPTION OF RANDOM VALUES

The statistical sense of cumulants, their various properties and relationships between cumulants and moments are investigated in detail. The cumulant brackets method is introduced to simplify operations on non-Gaussian variables. Cumulant equations connecting average values of arbitrary functions with cumulants of their arguments are derived. Distributions having a finite set of nonzero cumulants are discussed.

Section II

CUMULANT DESCRIPTION OF RANDOM PROCESSES

The cumulant and moment functions and their relations for random non-Gaussian processes are considered. Cumulant function time constants of the stationary non-Gaussian process and its spectra are defined and discussed. Cumulant and moment function of derivatives and integrals of arbitrary processes are obtained.

A considerable part of this section is concentrated on non-Gaussian Markov processes. Kinetic equation method for cumulants and cumulant functions of Markov process allows to find its time evolution.

Section III

LINEAR TRANSFORMATIONS OF RANDOM PROCESSES

Linear inertial systems are represented through moment functions and frequency characteristics. Moment and cumulant functions transformations by linear systems are investigated for arbitrary processes. Differential equations for moment and cumulant functions of linear system output are obtained. The effects of normalization and denormalization of non-Gaussian processes by linear inertial systems are considered in detail.

Section IV

NONLINEAR TRANSFORMATIONS OF RANDOM PROCESSES

By means of cumulant equations, which generalize Price's theorem on non-Gaussian variables, nonlinear noninertial transformations of arbitrary random noise as well as transformations of its cumulant functions and spectra are analysed here with certain examples. Implicit nonlinear transformations and noninertial feed-back detection are considered. The effect of powerful both white and smooth noise upon nonlinear inertial systems are investigated in detail. The nonlinear inertial system bandwidth is defined and derived as well as the conditions under which arbitrary noise may be considered as white noise. Finally the features of inertial detection of noise are discussed.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга написана на материале лекций, прочитанных автором в течение ряда последних лет на радиофизическом факультете Горьковского государственного университета и посвященных вопросам кумулянтного представления случайных процессов и их преобразований. Основы этого представления были заложены фундаментальными работами Р. Л. Стратоновича, оказавшими большое стимулирующее воздействие на последующее развитие теории случайных процессов и их приложений к многочисленным задачам статистической радиофизики, радиотехники, теории автоматического управления, оптимального обнаружения сигналов на фоне помех и т. п.

Развивая кумулянтное представление, автору удалось получить новые результаты, касающиеся закономерностей нелинейного преобразования негауссовых случайных величин и процессов, их описания, а также кинетики марковских процессов, что позволило построить общий кумулянтный анализ негауссовых переменных и их преобразований.

Цель книги — не только ввести читателя в круг вопросов, связанных с кумулянтным описанием негауссовых случайных величин и процессов, но и дать возможность активно овладеть аппаратом кумулянтного анализа. Этому способствуют подробное и систематическое изложение материала, наличие в тексте многочисленных ссылок на полученные формулы и приложений I—III, а также чередование теоретических выкладок с конкретными примерами.

Изложение ведется на уровне, доступном для широкого круга научно-технических работников, студентов старших курсов и аспирантов радиотехнических и радиофизических специальностей.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить своих учеников и товарищей: А. А. Дубкова, совместно с которым написаны § 2.6, 2.7, Л. П. Зачевицкую, С. Н. Молодцова, А. И. Саичева, Л. Г. Шепелевич за многостороннюю помощь в работе над книгой, а также Т. П. Некрасову за большой труд по оформлению рукописи.

Автор искренне признателен рецензентам чл.-корр. АН СССР С. М. Рытову и проф. Ю. С. Лезину за плодотворную критику и ценные советы, несомненно, способствовавшие улучшению книги, а также И. М. Миндлину за полезные замечания по гл. 3.

Горький, март 1978

Малахов А. Н.

1. К настоящему времени опубликовано немало книг, посвященных прикладным теориям случайных процессов применительно к различным статистическим задачам радиофизики, радиотехники и электроники, теории связи, автоматического управления и т. п. (см., например, [1—9]). В большинстве подобных книг, как правило, основным способом представления случайных величин и процессов, помимо функций распределения и характеристических функций, является описание их различными статистическими средними, в том числе моментами и моментными функциями. При анализе преобразований случайных переменных, особенно нелинейных преобразований, в первую очередь интересуются тем, как преобразуются вероятностные распределения, моменты и моментные функции; для них пишут уравнения и с их помощью анализируют те или иные статистические закономерности преобразований.

Вместе с этим существует и другой подход к изучению случайных величин и процессов — их описание с помощью кумулянтов (семиинвариантов) и кумулянтных функций (обобщенных корреляционных функций) [5, 10—15], являющихся нелинейными комбинациями статистических средних. Такой подход использовался и в теории случайных процессов [5, 10, 11, 16, 17, 74—77], и при решении прикладных задач (см., например, [18—25, 67]).

2. Хотя с формальной точки зрения кумулянтное описание случайных переменных дает столь же полное их статистическое представление, сколь и моментное, оно обладает, вместе с тем, важными и привлекательными преимуществами.

Первое преимущество заключается в том, что кумулянты и кумулянтные функции, в отличие от моментов и моментных функций, а также и от так называемых квазимоментных функций [26, 27], имеют четко выраженный самостоятельный статистический смысл и могут быть заданы в определенной степени независимо друг от друга, являясь в этом плане некоторыми «нормальными координатами» статистического описания. Это приводит, например, к тому, что различные статистические средние «выходов» нелинейных преобразований выражаются простым образом именно через кумулянты «входных» переменных.

Второе преимущество кумулянтов и кумулянтных функций связано с тем, что учет их высших порядков позволяет просто описать любую степень негауссовости случайных величин и процессов. По

этой причине основную ценность кумулянтное описание имеет именно для негауссовых переменных.

Третье, весьма важное преимущество кумулянтного описания случайных величин и процессов обусловлено тем, что конечному набору кумулянтов всегда соответствует некоторая «хорошая» вещественная функция, аппроксимирующая вероятностное распределение, в то время как несингулярной функции, все высшие моменты которой равнялись бы нулю, не существует. Это обстоятельство имеет особо важное значение при приближенном представлении вероятностных распределений тех случайных величин и процессов, для которых можно отыскать лишь конечные наборы кумулянтов и кумулянтных функций.

3. Вместе с тем следует признать, что несмотря на указанные преимущества, метод кумулянтов и кумулянтных функций не получил еще достаточно широкого распространения. Это связано с малой изученностью как свойств кумулянтов и кумулянтных функций, так и возможностей их использования. В свою очередь, это обусловлено отсутствием адекватного аппарата кумулянтного описания случайных переменных и их преобразований, который имеется для моментов и моментных функций (аппарат статистических средних). Хотя моменты и моментные функции всегда можно выразить через соответствующие кумулянты и кумулянтные функции, но такой непосредственный путь приводит к большим затруднениям при переходе от «языка моментов» на «язык кумулянтов», особенно при нелинейных преобразованиях случайных переменных.

Таким образом, для эффективной реализации кумулянтного подхода и наиболее полного использования его возможностей при исследовании статистических характеристик и свойств случайных негауссовых переменных и их преобразований необходимо разработать специальный аппарат кумулянтного анализа.

Опыт разработки такого аппарата вместе с многочисленными примерами его использования в теории случайных величин, случайных процессов и их преобразований предлагается вниманию читателя настоящей монографией, значительная часть которой содержит оригинальный материал.

Методологической основой развиваемого кумулянтного анализа негауссовых случайных величин и процессов служат:

- формализм кумулянтных скобок [28, 29], описывающих статистические взаимосвязи случайных переменных и обладающих рядом простых и важных свойств;

- аппарат кумулянтных уравнений [30, 31], взаимосвязывающих средние значения каких-либо функций от негауссовых переменных с кумулянтами этих переменных;

- оперирование со случайными переменными, обладающими конечным набором отличных от нуля кумулянтов и кумулянтных функций;

- аппарат кинетических уравнений кумулянтов и кумулянтных функций марковских процессов и совокупностей [29, 32, 33].

КУМУЛЯНТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Глава 1

КУМУЛЯНТЫ

1.1. Моментное представление случайной величины

1. Пусть случайная величина ξ задана плотностью вероятности $W_{\xi}(x)$, которую будем называть также вероятностным распределением или просто распределением случайной величины. Будем предполагать далее, что как плотность вероятности, так и ее производные при наличии сингулярностей могут быть выражены через дельта-функции, а в точках разрыва плотности вероятности или ее производных будем доопределять их полусуммой пределов справа и слева.

Любая плотность вероятности должна удовлетворять двум условиям:

$$W(x) \geq 0 \text{ для всех } x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = 1.$$

Важнейшим аппаратом теории случайных величин является аппарат статистических средних. Пусть $f(\xi)$ — какая-либо функция от случайной величины ξ . Среднее статистическое значение этой функции определяется тогда как

$$\langle f(\xi) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) W_{\xi}(x) dx.$$

2. Моментами распределения или моментами случайной величины ξ называются интегралы

$$\alpha_n^{\xi} \equiv \langle \xi^n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^n W_{\xi}(x) dx \quad (1.1.1)$$

($n = 1, 2, \dots$), если они существуют. О моменте α_n говорят как о моменте n -го порядка.

Для всякого распределения $W_{\xi}(x)$ моменты согласно (1.1.1) определяются однозначно. Это значит, что они являются характеристиками распределения — некоторыми величинами, представляющими плотность вероятности $W_{\xi}(x)$, т. е. определенные свойства случайной величины ξ . Вместе с тем вовсе не у каждого распределения существуют (являются конечными) все моменты. У резонансного распределения, например,

$$W(x) = b\pi^{-1} [b^2 + (x - a)^2]^{-1} \quad (1.1.2)$$

все четные моменты бесконечны.

С другой стороны, если плотность вероятности отлична от нуля только в каком-нибудь конечном интервале значений x , т. е. если $W(x)$ является *финитной* функцией, как, например, для равномерного распределения

$$W(x) = (b - a)^{-1} [1(x - a) - 1(x - b)], \quad (1.1.3)$$

где

$$1(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 1/2 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

то у такого распределения существуют все моменты.

Рассматривают также *центральные* моменты распределения

$$\mu_n^{\xi} \equiv \langle \xi_0^n \rangle \equiv \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^n \rangle,$$

где ξ_0 — центрированная случайная величина.

В дальнейшем, когда это не вызовет путаницы, мы часто будем опускать у моментов верхний индекс, обозначающий случайную величину, и записывать их просто как α_n, μ_n . Взаимосвязь α_n с μ_n дается формулами (полагаем $\alpha_0 = 1, \mu_0 = 0$)

$$\alpha_n = \sum_{\lambda=0}^n C_n^{\lambda} \alpha_1^{\lambda} \mu_{n-\lambda}, \quad \mu_p = \sum_{\lambda=0}^p (-1)^{\lambda} C_p^{\lambda} \alpha_1^{\lambda} \alpha_{p-\lambda}.$$

Для первого момента α_1^{ξ} -среднего значения и второго центрального момента μ_2^{ξ} -дисперсии случайной величины ξ примем специальные обозначения:

$$\alpha_1^{\xi} \equiv \langle \xi \rangle \equiv m_{\xi}, \quad \mu_2^{\xi} \equiv \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle \equiv D_{\xi} \equiv \sigma_{\xi}^2,$$

где через σ_{ξ} обозначено так называемое стандартное отклонение.

Допустим, что α_n или μ_n однозначно определяют плотность вероятности $W(x)$. Тогда вместо нее можно рассматривать бесконечный ряд

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s, \dots \text{ или } \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_s, \dots$$

Другими словами, любой из этих бесконечных рядов исчерпывающим образом представляет случайную величину, являясь *тождественным* представлением ее вероятностного распределения. В таком случае можно говорить о *моментном представлении* случайной величины.

3. Поскольку плотность вероятности любой случайной величины абсолютно интегрируема, постольку всегда существует ее сопряженная Фурье, называемая характеристической функцией распределения

$$\Theta_{\xi}(u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) e^{iux} dx \equiv \langle e^{iu\xi} \rangle_{\xi}. \quad (1.1.4)$$

Обратное преобразование от $\Theta(u)$ к $W(x)$ имеет вид

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{\xi}(u) e^{-iux} du. \quad (1.1.5)$$

Последний интеграл, в отличие от (1.1.4), может и не обладать сходимостью. В этом случае он понимается в смысле главного значения, или в смысле суммирования, или, наконец, в смысле обобщенных функций. Кроме того, как уже говорилось, в точках разрыва под $W(x)$ будем понимать полусумму пределов слева и справа.

Пара преобразований Фурье (1.1.4), (1.1.5) позволяет говорить о характеристической функции $\Theta(u)$ как о тождественном представлении вероятностного распределения $W(x)$. Характеристическая функция обладает следующими свойствами:

- 1) $\Theta(0) = 1$;
- 2) $\Theta(u)$ — непрерывна для всех u ;
- 3) $|\Theta(u)| \leq \Theta(0)$;
- 4) $\Theta(-u) = \Theta^*(u)$;
- 5) $\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(u) e^{-iux} du \geq 0$.

(1.1.6)

Свойства 3—5 с учетом свойства $\Theta(0) \geq 0$ эквивалентны определению так называемой *положительно-определенной функции* $\Theta(u)$ [37—39]. Все свойства (1.1.6) без труда можно получить из определяющих формул (1.1.4), (1.1.5), что доказывает их необходимость. С другой стороны, их достаточность следует из теоремы Бохнера—Хинчина:

для того, чтобы непрерывная функция $\Theta(u)$ такая, что $\Theta(0) = 1$, была характеристической функцией некоторого распределения, необходимо и достаточно, чтобы она была положительно-определенной (см., например, [38—40]).

Так как характеристическая функция тождественно представляет плотность вероятности, то очевидно, что и любые параметры распределения можно «извлечь» из этой функции. Так, моменты распределения

$$\alpha_n = j^{-n} \left[\frac{d^n \Theta(u)}{du^n} \right]_{u=0} \equiv j^{-n} \Theta^{(n)}(0).$$

Таким образом, коэффициенты разложения характеристической функции в степенной ряд

$$\Theta(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} (ju)^n \quad (1.1.7)$$

определяются именно моментами распределения.

1.2. Кумулянты

1. Характеристическую функцию можно записать в виде $\Theta(u) = \exp(B(u))$, где, очевидно, должно быть $B(0) = 0$. Разложим функцию $B(u)$ в степенной ряд

$$B(u) = \ln \Theta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k. \quad (1.2.1)$$

Коэффициенты этого ряда

$$\kappa_k = j^{-k} B^{(k)}(0) = j^{-k} \left[\frac{d^k \ln \Theta(u)}{du^k} \right]_{u=0} \quad (1.2.2)$$

так же, как и моменты, являются характеристиками вероятностного распределения и носят название *кумулянтов* или *семиинвариантов*. Таким образом,

$$\Theta(u) = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k \right]. \quad (1.2.3)$$

Кумулянты однозначно определяют случайную величину, если ряд (1.2.1) сходится для всех u . Поэтому набор кумулянтов $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_s, \dots$ также может служить тождественным представлением вероятностного распределения.

Если известны моменты, то кумулянты могут быть найдены из следующих соотношений (см., например, [13, 14]):

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \alpha_1 = m, \\ \kappa_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2 = D, \\ \kappa_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3, \\ \kappa_4 &= \alpha_4 - 3\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4, \\ \kappa_5 &= \alpha_5 - 5\alpha_1\alpha_4 - 10\alpha_2\alpha_3 + 20\alpha_1^2\alpha_3 + 30\alpha_1\alpha_2^2 - 60\alpha_1^3\alpha_2 + \\ &\quad + 24\alpha_1^5, \\ \kappa_6 &= \alpha_6 - 6\alpha_1\alpha_5 - 15\alpha_2\alpha_4 + 30\alpha_1^2\alpha_4 - 10\alpha_3^2 + 120\alpha_1\alpha_3 - \\ &\quad - 120\alpha_1^3\alpha_3 + 30\alpha_2^2 - 270\alpha_1^2\alpha_2^2 + 360\alpha_1^4\alpha_2 - 120\alpha_1^6, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

В свою очередь, моменты могут быть выражены через кумулянты:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \kappa_1, \\ \alpha_2 &= \kappa_2 + \kappa_1^2, \\ \alpha_3 &= \kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3, \end{aligned}$$

где

$$\left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(ju)^k}{k!} \beta_k \right] = \exp \left[\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(ju)^k}{k!} \kappa_k \right].$$

Сравнивая это тождество с (1.1.7) и с (1.2.3), легко понять, что коэффициенты β_k представляют собой не что иное, как моменты распределения α_k , вычисленные при условии $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 0$. Таким образом, находим

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \kappa_3, \quad \beta_4 = \kappa_4, \quad \beta_5 = \kappa_5, \quad \beta_6 = \kappa_6 + 10\kappa_3^2, \\ \beta_7 &= \kappa_7 + 35\kappa_3\kappa_4, \quad \beta_8 = \kappa_8 + 56\kappa_3\kappa_5 + 35\kappa_4^2, \\ \beta_9 &= \kappa_9 + 84\kappa_3\kappa_6 + 126\kappa_4\kappa_5 + 280\kappa_3^3, \\ \beta_{10} &= \kappa_{10} + 120\kappa_3\kappa_7 + 210\kappa_4\kappa_6 + 126\kappa_5^2 + 2100\kappa_4\kappa_3^2. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Эти коэффициенты называются *квазимоментами* распределения [5, 26, 27]. Они отличны от нуля только для негауссовых случайных величин.

Совершая преобразование Фурье (1.2.8), получаем

$$W(x) = W_{\Gamma}(x) + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_k}{k!} W_{\Gamma}^{(k)}(x). \quad (1.2.10)$$

Полученный ряд называется рядом Эджворта [13]. Он дает разложение произвольной плотности вероятности по производным гауссова распределения. В том случае, когда высшие кумулянты достаточно малы, можно ограничиться, например, четырьмя членами суммы

$$\begin{aligned} W(x) &= W_{\Gamma}(x) - \frac{\kappa_3}{3!} W_{\Gamma}^{(3)}(x) + \frac{\kappa_4}{4!} W_{\Gamma}^{(4)}(x) - \\ &- \frac{\kappa_5}{5!} W_{\Gamma}^{(5)}(x) + \frac{\kappa_6 + 10\kappa_3^2}{6!} W_{\Gamma}^{(6)}(x). \end{aligned}$$

Из этой формулы непосредственно видна особая ценность кумулянтов κ_3 , κ_4 , κ_5 , κ_6 при оценке отклонения плотности вероятности от гауссовой.

4. Характеристическую функцию можно представить также и в виде

$$\Theta(u) = e^{ju\kappa_1} \left[1 + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(ju)^s}{s!} \mu_s \right]. \quad (1.2.11)$$

Сравнивая между собой три вида разложения характеристической функции (1.1.7), (1.2.11) и (1.2.8), интересно обратить внимание на то, что α_s , μ_s и β_s образуют некоторый закономерный ряд. Так, μ_s есть α_s при условии $\kappa_1 = 0$, а β_s есть α_s при условии $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. С этой точки зрения центральный момент также носит смысл квазимомента,

1.3. Моменты и кумулянты двумерного распределения

1. Совокупность $\{\xi, \eta\}$ двух случайных величин ξ и η можно рассматривать как двумерную случайную величину, исчерпывающим образом представленную двумерной плотностью вероятности $W_{\xi, \eta}(x, y)$ или двумерной характеристической функцией $\Theta_{\xi, \eta}(u, v)$.

Степень статистической взаимосвязи случайных величин описывается условными плотностями вероятности $W_{\xi}(y|x)$, $W_{\eta}(x|y)$, определенными таким образом, что

$$W_{\xi, \eta}(x, y) = W_{\xi}(x) W_{\eta}(x|y) = W_{\eta}(y) W_{\xi}(y|x).$$

Аргумент условных плотностей вероятности, стоящий перед вертикальной чертой, является их параметром.

Случайные величины ξ и η называются *статистически независимыми*, если

$$W_{\xi, \eta}(x, y) = W_{\xi}(x) W_{\eta}(y).$$

Для таких случайных величин

$$\Theta_{\xi, \eta}(u, v) = \Theta_{\xi}(u) \Theta_{\eta}(v).$$

2. Моменты двумерного распределения имеют два верхних и два нижних индекса:

$$\alpha_{n, m}^{\xi, \eta} \equiv \langle \xi^n \cdot \eta^m \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^m W_{\xi, \eta}(x, y) dx dy.$$

$$\mu_{n, m}^{\xi, \eta} \equiv \langle \xi_0^n \cdot \eta_0^m \rangle = \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^n \cdot (\eta - \langle \eta \rangle)^m \rangle.$$

Первый индекс всегда будет относиться к первой случайной величине, а второй индекс — ко второй. В том случае, когда порядок случайных величин не меняется и возможность путаницы исключена, мы так же, как и для одномерных моментов, верхние индексы будем опускать и эти моменты записывать просто как $\alpha_{n, m}$ или $\mu_{n, m}$ или иногда еще проще: α_{nm} , μ_{nm} .

Порядком момента называется сумма $n + m$. Моменты называются *совместными*, если и n , и m отличны от нуля. Легко видеть, что моменты α_{n0} , μ_{n0} или α_{0m} , μ_{0m} являются моментами одномерных распределений соответствующих случайных величин. Для них мы часто будем использовать также и прежнее обозначение, но тогда во избежание путаницы, верхние индексы у них должны записываться, например: $\alpha_{n0} \equiv \alpha_n^{\xi}$, $\mu_{0m} \equiv \mu_m^{\eta}$.

Совместный центральный момент второго порядка носит название *ковариации* случайных величин ξ и η . Введем для него специальное обозначение: $\mu_{1, 1}^{\xi, \eta} \equiv \langle \xi_0 \eta_0 \rangle \equiv B_{\xi \eta}$.

Обычный совместный момент второго порядка будем называть *корреляцией* случайных величин и обозначать

$$\alpha_{1, 1}^{\xi, \eta} \equiv \langle \xi \eta \rangle \equiv K_{\xi \eta}.$$

3. Характеристическая функция двумерной случайной величины может быть разложена в двойной степенной ряд:

$$\Theta(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n,m}}{n! m!} (ju)^n (jv)^m.$$

Эту двойную сумму целесообразно записать в другом виде, где сначала суммируются все моменты одного порядка, а затем уже идет суммирование по порядкам:

$$\Theta(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{\lambda=0}^s C_s^{\lambda} u^{s-\lambda} v^{\lambda} \alpha_{(s-\lambda), \lambda}.$$

Разложение логарифма характеристической функции в степенной ряд

$$\ln \Theta(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa_{n,m}}{n! m!} (ju)^n (jv)^m$$

определяет $\kappa_{n,m}$ — кумулянты двумерного распределения:

$$\kappa_{n,m} = (-j)^{n+m} \left[\frac{\partial^{n+m} \ln \Theta(u, v)}{\partial u^n \partial v^m} \right]_{u=v=0}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Theta(u, v) &= \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa_{n,m}}{n! m!} (ju)^n (jv)^m \right] = \\ &= \exp \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{\lambda=0}^s C_s^{\lambda} u^{s-\lambda} v^{\lambda} \kappa_{(s-\lambda), \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Порядком кумулянта $\kappa_{n,m}$ называется сумма $n + m$. Совместные кумулянты — это те кумулянты $\kappa_{n,m}$, для которых и n и m , отличны от нуля. Вместо $\kappa_{n,m}$ будем также писать иногда κ_{nm} , если это не вызовет недоразумений.

4. Связи между двумерными моментами и кумулянтами даются, например, следующими формулами [14]:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \kappa_{11} + \kappa_{10}\kappa_{01}, \\ \alpha_{21} &= \kappa_{21} + \kappa_{20}\kappa_{01} + 2\kappa_{11}\kappa_{10} + \kappa_{10}^2\kappa_{01}, \\ \alpha_{31} &= \kappa_{31} + 3\kappa_{20}\kappa_{11} + 3\kappa_{21}\kappa_{10} + \kappa_{30}\kappa_{01} + 3\kappa_{20}\kappa_{10}\kappa_{01} + \\ &+ 3\kappa_{11}\kappa_{10}^2 + \kappa_{10}^3\kappa_{01}, \\ \alpha_{22} &= \kappa_{22} + \kappa_{20}\kappa_{02} + 3\kappa_{10}\kappa_{12} + 2\kappa_{01}\kappa_{21} + \kappa_{10}^2\kappa_{02} + \kappa_{01}^2\kappa_{20} + \\ &+ 2\kappa_{11}^2 + 4\kappa_{10}\kappa_{01}\kappa_{11} + \kappa_{10}^2\kappa_{01}^2. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Формулы, выражающие совместные кумулянты через моменты, имеют, например, следующий вид:

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01}, \\ \kappa_{21} &= \alpha_{21} - 2\alpha_{10}\alpha_{11} - \alpha_{20}\alpha_{01} + 2\alpha_{10}^2\alpha_{01}, \end{aligned}$$

$$\kappa_{31} = \alpha_{31} - 3\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{01}\alpha_{30} - 3\alpha_{20}\alpha_{11} + 6\alpha_{10}\alpha_{01}\alpha_{20} + \\ + 6\alpha_{10}^2\alpha_{11} - 6\alpha_{10}^3\alpha_{01}. \quad (1.3.3)$$

В заключение параграфа отметим, что взаимосвязи между совместными моментами и кумулянтами можно, вообще говоря, получить из аналогичных выражений для одной случайной величины, используя некоторый формальный прием (см. [14]). Кроме того, выражения (1.3.2) и (1.3.3) элементарно получаются при использовании метода кумулянтных скобок (см. ниже гл. 2).

1.4. Статистическая зависимость и корреляция

1. Если две случайные величины статистически независимы, то двумерные моменты распадаются на произведение одномерных, а все совместные кумулянты обращаются в нуль. С другой стороны, если все совместные кумулянты равны нулю, то на основании (1.3.1) случайные величины статистически независимы. Тем самым, равенство нулю всех совместных кумулянтов необходимо и достаточно для статистической независимости случайных величин.

Следовательно, какую-либо статистическую связь случайных величин можно оценивать по их совместным кумулянтам. Расположим эти кумулянты в соответствии с их порядком в виде треугольной таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \kappa_{11} & & \\ & & & & & & \\ & & & \kappa_{12} & & \kappa_{21} & \\ & & \kappa_{13} & & \kappa_{22} & & \kappa_{31} \\ & \kappa_{14} & & \kappa_{23} & & \kappa_{32} & & \kappa_{41} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (1.4.1)$$

Будем говорить, что две случайные величины *статистически зависимы*, если хотя бы один совместный кумулянт из (1.4.1) отличен от нуля. Ни двумерная характеристическая функция, ни двумерная плотность вероятности не распадается в этом случае на произведение одномерных сомножителей.

Это значит, что статистическая зависимость двух случайных величин есть характеристика, присущая именно двумерному распределению, и она не влияет на одномерные распределения этих величин, поскольку последние определяются только кумулянтами κ_{n0} и κ_{0m} . Тем самым, задавшись какими-либо одномерным распределениями, т. е. значениями κ_{n0} и κ_{0m} , мы можем построить сколько угодно треугольных таблиц (1.4.1), т. е. сколько угодно двумерных распределений.

2. Простейшим совместным кумулянтom является ковариация

$$B_{\xi\eta} \equiv \kappa_{11}^{\xi,\eta} = \mu_{11}^{\xi,\eta} = K_{\xi\eta} - m_{\xi}m_{\eta}.$$

Та статистическая взаимосвязь между двумя случайными величинами, которая связана с тем, что $\kappa_{11} \neq 0$, носит название *корре-*

лированности этих величин. Говорят, что две случайные величины коррелированы, если $\kappa_{11} \neq 0$, и некоррелированы, если $\kappa_{11} = 0$. Численно коррелированность удобно оценивать безразмерным коэффициентом корреляции

$$r = \frac{\kappa_{11}}{\sqrt{\kappa_{20} \kappa_{02}}} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}}, \quad (1.4.2)$$

абсолютная величина которого не превышает единицы $0 \leq |r| \leq 1$.

Статистически независимые величины некоррелированы. Однако из некоррелированности в общем случае не следует статистическая независимость. Случайные величины могут быть некоррелированы ($\kappa_{11} = 0$) и в то же время статистически зависимы, если хотя бы один из кумулянтов более высокого порядка в (1.4.1) отличен от нуля. Вместе с тем, имеются и такие двумерные распределения, для которых некоррелированность означает статистическую независимость. Очевидно, что это те распределения, все совместные кумулянты которых, кроме κ_{11} , вообще равны нулю (см. следующий параграф).

Рассмотрим характер взаимосвязи двух случайных величин, описываемой корреляцией. Пусть случайные величины связаны линейным соотношением $\eta = a\xi + b$. Тогда $r = a/|a|$. Итак, коэффициент корреляции линейно-связанных случайных величин принимает значения, равные ± 1 в зависимости от знака a . Тем самым линейно-связанные случайные величины полностью коррелированы.

Возьмем теперь нелинейную связь. Пусть, например, $\eta = a\xi^2$, а распределение $W_{\xi}(x)$ симметрично относительно $x = 0$. В этом случае нетрудно обнаружить, что $\kappa_{11} = 0$, а следовательно, и $r = 0$. Таким образом, хотя случайные величины ξ и η жестко взаимосвязаны, коэффициент их корреляции равен нулю. В то же время можно показать, что, например, $\kappa_{21} \neq 0$.

По этой причине коэффициент корреляции r называют также коэффициентом *линейной* корреляции, подчеркивая, что он характеризует степень линейной статистической связи случайных величин.

Смысл статистической связи, представленной высшими совместными кумулянтами, будет рассмотрен ниже.

3. В заключение параграфа укажем свойства ковариации $B_{\xi\eta}$ и корреляции $K_{\xi\eta}$ двух случайных величин.

Известно, (см., например, [41]), что если некоторая операция $[u, v]$ над переменными u и v обладает следующими свойствами:

- 1) $[u, v] = [v, u]$,
- 2) $[u + u_1, v + v_1] = [u, v] + [u_1, v] + [u, v_1] + [u_1, v_1]$,
- 3) $[cu, v] = c[u, v]$, $c = \text{const}$; 4) $[u, u] \geq 0$, (1.4.3)

то справедливы два неравенства: неравенство Коши — Буняковского

$$|[u, v]| \leq \sqrt{[u, u][v, v]} \quad (1.4.4)$$

и «неравенство треугольника»

$$\sqrt{[u + v, u + v]} \leq \sqrt{[u, u]} + \sqrt{[v, v]}.$$

Легко проверить, что как корреляция $\langle \xi \cdot \eta \rangle = K_{\xi\eta}$, так и ковариация $B_{\xi\eta} = \langle \xi \cdot \eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle$ обладают всеми свойствами (1.4.3). Следовательно,

$$|K_{\xi\eta}| \leq \sqrt{\langle \xi^2 \rangle \langle \eta^2 \rangle}, \quad \sqrt{\langle (\xi + \eta)^2 \rangle} \leq \sqrt{\langle \xi^2 \rangle} + \sqrt{\langle \eta^2 \rangle},$$

$$|B_{\xi\eta}| \leq \sqrt{D_{\xi} D_{\eta}}, \quad \sqrt{D_{\xi + \eta}} \leq \sqrt{D_{\xi}} + \sqrt{D_{\eta}}.$$

1.5. Некоторые двумерные распределения

1. Пусть из всех кумулянтов двумерного распределения отличны от нуля кумулянты только первого и второго порядков:

$$\begin{array}{cccccc} & & \kappa_{10} & & \kappa_{01} & \\ & & & & & \\ & \kappa_{20} & & \kappa_{11} & & \kappa_{02} \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Характеристическая функция этого распределения равна

$$\Theta_r(u, v) \equiv \exp [j (\kappa_{10}u + \kappa_{01}v) - (1/2) (\kappa_{20}u^2 + 2\kappa_{11}uv + \kappa_{02}v^2)]. \quad (1.5.1)$$

Соответствующее распределение

$$W_r(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi \sqrt{\kappa_{20} \kappa_{02} - \kappa_{11}^2}} \times$$

$$\times \exp \left[\frac{\kappa_{02} (x - \kappa_{10})^2 - 2\kappa_{11} (x - \kappa_{10}) (y - \kappa_{01}) + \kappa_{20} (y - \kappa_{01})^2}{2 (\kappa_{20} \kappa_{02} - \kappa_{11}^2)} \right] \quad (1.5.2)$$

называется *двумерным гауссовым* распределением. О случайных величинах, подчиняющихся этому распределению, говорят как о *совокупно-гауссовых* величинах. Совокупно-гауссовы случайные величины по отдельности также гауссовы, их некоррелированность означает статистическую независимость.

2. Поставим и проанализируем два следующих вопроса:

— Всякие ли гауссовы случайные величины являются и совокупно-гауссовыми?

— Существуют ли негауссовы случайные величины, некоррелированность которых ведет к их статистической независимости?

Поскольку «построение» совместного распределения двух случайных величин из заданных одномерных распределений должно происходить путем задания совместных кумулянтов, то поставленные вопросы переходят в следующий общий: насколько произволь-

но можно задавать совместные кумулянты, входящие в треугольник

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \kappa_{10} & & \kappa_{01} & & & \\
 & & & & \kappa_{11} & & \kappa_{02} & & \\
 & & \kappa_{20} & & & & & & \\
 & \kappa_{30} & & \kappa_{21} & & \kappa_{12} & & \kappa_{03} & \\
 \kappa_{40} & & \kappa_{31} & & \kappa_{22} & & \kappa_{13} & & \kappa_{04} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

если одномерные кумулянты κ_{n0} и κ_{0m} , образующие стороны этого треугольника, заданы?

Если возможен, например, треугольник

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \kappa_{10} & & \kappa_{01} & & & \\
 & & & \kappa_{20} & & \kappa_{11} & & \kappa_{02} & \\
 & 0 & & \kappa_{21} & & \kappa_{12} & & 0 & \\
 0 & & \kappa_{31} & & \kappa_{22} & & \kappa_{13} & & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}, \quad (1.5.3)$$

в котором одномерными, отличными от нуля кумулянтами являются только кумулянты двух первых порядков, то мы приходим к совместному негауссовому распределению двух гауссовых случайных величин и таким образом получаем отрицательный ответ на первый вопрос.

Если возможен треугольник

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \kappa_{10} & & \kappa_{01} & & & \\
 & & & \kappa_{20} & & \kappa_{11} & & \kappa_{02} & \\
 & \kappa_{30} & & 0 & & 0 & & \kappa_{03} & \\
 \kappa_{40} & & 0 & & 0 & & 0 & & \kappa_{04} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}, \quad (1.5.4)$$

в котором все совместные кумулянты, кроме κ_{11} , равны нулю, то мы приходим к положительному ответу на второй вопрос и получаем пример коррелированных негауссовых случайных величин, переходящих в статистически независимые при $\kappa_{11} \rightarrow 0$.

В литературе, по-видимому, отсутствует какое-либо обсуждение взаимоотношений кумулянтов, находящихся в ряду ($n > 2$)

$$\kappa_{n0} \quad \kappa_{n-1,1} \quad \kappa_{n-2,2} \dots \kappa_{2,n-2} \quad \kappa_{1,n-1} \quad \kappa_{0n},$$

поэтому дать исчерпывающий анализ поставленных вопросов не представляется возможным*). Поэтому отвечая на них, обратимся к конкретным примерам.

*) Некоторый анализ взаимоотношений кумулянтов приведен в § 2.6 и 2.7.

3. Покажем, что гауссовы случайные величины могут образовывать негауссову совокупность.

Пример 1.5.1. Рассмотрим совокупно-гауссовы случайные величины ξ и η , кумулянты которых выбираем для простоты равными $\langle \xi \rangle = \langle \eta \rangle = 0$, $D_\xi = D_\eta = 1$, $B_{\xi\eta} = r$. Таким образом, совокупность $\{\xi, \eta\}$ описывается гауссовой плотностью вероятности (1.5.2), которую обозначим как $W_\Gamma(x, y; r)$.

Рассмотрим вместе с этим случайную величину $\zeta = \xi\vartheta$, где ϑ — случайная величина, принимающая равновероятно значения ± 1 . Можно показать, что ζ также имеет гауссово распределение с параметрами $\langle \zeta \rangle = 0$, $D_\zeta = D_\xi D_\vartheta = (1/4) D_\xi$.

Построим теперь совокупность $\{\zeta, \eta\}$. Нетрудно сообразить, что плотность вероятности этой совокупности равна

$$W_{\zeta\eta}(x, y) = \frac{1}{2} W_\Gamma(x, y; r) + \frac{1}{2} W_\Gamma(x, y; -r). \quad (1.5.5)$$

Характеристическая функция, соответствующая (1.5.5),

$$\Theta_{\zeta\eta}(u, v) = e^{-(u^2 + v^2)/2} \operatorname{ch} ruv$$

отлична от (1.5.1). Значит, совокупность $\{\zeta, \eta\}$ является негауссовой, а случайные величины ζ и η гауссовы.

Мы получим аналогичный результат и в том случае, когда на гауссовой совокупности $\{\xi, \eta\}$ построим совокупность $\{\zeta, \omega\}$ с $\omega = \eta\lambda$, где λ — случайная величина, имеющая то же вероятностное распределение, что и ϑ , и статистически независимая от нее. Совокупность $\{\zeta, \omega\}$ также будет негауссовой.

Пример 1.5.2. Простым обобщением негауссова распределения (1.5.5), построенного на гауссовой плотности вероятности $W_\Gamma(x, y; r)$, является

$$W(x, y) = c_1 W_\Gamma(x, y; r_1) + c_2 W_\Gamma(x, y; r_2) \quad (1.5.6)$$

с $c_1, c_2 > 0$ и $c_1 + c_2 = 1$. Легко проверить, что распределение (1.5.6) удовлетворяет условию нормировки и при интегрировании по одному аргументу становится гауссовым по другому.

Характеристическая функция, соответствующая (1.5.6), равна

$$\Theta(n, v) = e^{-(u^2 + v^2)/2} [c_1 e^{-r_1 uv} + c_2 e^{-r_2 uv}].$$

Другие примеры негауссовых двумерных распределений гауссовых случайных величин читатель может найти, например, в [8].

4. Обратимся теперь к ситуации, изображенной треугольником кумулянтов (1.5.4). Совершенно ясно, что характеристическая функция в этом случае равна

$$\Theta(u, v) = e^{-\kappa_{11} uv} \Theta_1(u) \Theta_2(v),$$

где Θ_1, Θ_2 — характеристические функции негауссовых случайных величин, которые всегда можно записать в виде

$$\Theta_1(u) = \Psi_1(u) \exp\left(j\kappa_{10} u - \frac{\kappa_{20}}{2} u^2\right),$$

$$\Theta_2(v) = \Psi_2(v) \exp\left(j\kappa_{01} v - \frac{\kappa_{02}}{2} v^2\right).$$

Таким образом, двумерная характеристическая функция негауссовой совокупности некоторых случайных величин $\{\xi_1, \eta_1\}$

$$\Theta(u, v) = \Theta_{\Gamma}(u, v) \Psi_1(u) \Psi_2(v) \quad (1.5.7)$$

представляет собой произведение характеристической функции гауссовой совокупности $\{\xi', \eta'\}$ на характеристические функции произвольных негауссовых статистически независимых случайных величин ξ'' и η'' , имеющих плотности вероятности W_1 и W_2 соответственно. Преобразование Фурье (1.5.7) дает нам плотность вероятности

$$W(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\Gamma}(s, t) W_1(x-s) W_2(y-t) ds dt,$$

которая означает, что $\xi = \xi' + \xi''$, $\eta = \eta' + \eta''$.

Итак, мы получили негауссову совокупность случайных величин $\{\xi, \eta\}$, взаимосвязанных только коррелированностью, так что если ξ, η становятся некоррелированными, то они одновременно становятся и статистически независимыми.

1.6. Моменты и кумулянты многомерного распределения

1. Для совокупности случайных величин $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\} \equiv \xi$ может быть введена как плотность вероятности

$$W_{\xi}(x) \equiv W_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_N}(x_1, x_2, \dots, x_N),$$

так и условные плотности вероятности, которые могут иметь различные «мерности» в зависимости от числа аргументов и числа фиксируемых параметров.

Так, например, условная плотность вероятности случайных величин $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_N$ при условии, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют фиксированные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, определяется как

$$\begin{aligned} W_{\xi_{n+1} \xi_{n+2} \dots \xi_N}(x_1, x_2, \dots, x_n | x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_N) = \\ = W_{\xi}(x) W_{\xi_1 \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-1}. \end{aligned}$$

2. Моменты и кумулянты N -мерного распределения можно определить разложением в кратные степенные ряды характеристической функции и ее логарифма:

$$\begin{aligned} \Theta_{\xi}(u) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N}}{n_1! n_2! \dots n_N!} \times \\ \times (ju_1)^{n_1} (ju_2)^{n_2} \dots (ju_N)^{n_N}, \end{aligned}$$

$$\ln \Theta_{\xi}(\mathbf{u}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \frac{\chi_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N}}{n_1! n_2! \dots n_N!} \times \\ \times (ju_1)^{n_1} (ju_2)^{n_2} \dots (ju_N)^{n_N}. \quad (1.6.1)$$

Таким образом,

$$\alpha_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N} = (-j)^{n_1 + n_2 + \dots + n_N} \left[\frac{\partial^{n_1 + n_2 + \dots + n_N} \ln \Theta_{\xi}(\mathbf{u})}{\partial u_1^{n_1} \partial u_2^{n_2} \dots \partial u_N^{n_N}} \right]_{u_i=0}, \quad (1.6.2)$$

$$\chi_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N} = (-j)^{n_1 + n_2 + \dots + n_N} \left[\frac{\partial^{n_1 + n_2 + \dots + n_N} \ln \Theta_{\xi}(\mathbf{u})}{\partial u_1^{n_1} \partial u_2^{n_2} \dots \partial u_N^{n_N}} \right]_{u_i=0}$$

Из симметрии (1.6.1) по отношению к $(ju_h)^{n_h}$ следует симметричность моментов и кумулянтов по отношению к парам индексов $\begin{pmatrix} \xi_k \\ n_k \end{pmatrix}$.

Часто бывает полезным изменить порядок суммирования и записать характеристическую функцию в другой форме:

$$\Theta_{\xi}(\mathbf{u}) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^s \alpha_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N} u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_N^{n_N} = \\ = \exp \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^s \chi_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N} u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_N^{n_N} \right] \quad (1.6.3)$$

Здесь сначала суммируются моменты и кумулянты, имеющие одинаковый порядок (внутренние суммы, в которых $n_1 + n_2 + \dots + n_N = s$), а затем суммирование идет по порядкам.

Отличие от нуля совместных кумулянтов говорит о существовании статистической зависимости между соответствующими случайными величинами. В тех случаях, когда порядок расположения рассматриваемых случайных величин не меняется и возможность путаницы исключена, верхние индексы у моментов и кумулянтов и запятые между нижними индексами по-прежнему будем опускать.

Между многомерными моментами и кумулянтами также существуют связи, подобные (1.3.2). Например, совместные моменты третьего и четвертого порядков для трех случайных величин следующим образом выражаются через кумулянты:

$$\begin{aligned}
\alpha_{111} &= \kappa_{111} + \kappa_{110}\kappa_{001} + \kappa_{101}\kappa_{010} + \kappa_{011}\kappa_{100} + \kappa_{100}\kappa_{010}\kappa_{001}, \\
\alpha_{211} &= \kappa_{211} + \kappa_{200}\kappa_{011} + 2\kappa_{110}\kappa_{101} + 2\kappa_{100}\kappa_{111} + \kappa_{010}\kappa_{201} + \\
&+ \kappa_{001}\kappa_{210} + \kappa_{200}\kappa_{010}\kappa_{001} + 2\kappa_{101}\kappa_{100}\kappa_{010} + 2\kappa_{110}\kappa_{100}\kappa_{001} + \\
&+ \kappa_{011}\kappa_{100}^2 + \kappa_{100}^2\kappa_{010}\kappa_{001}.
\end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Глава 2

КУМУЛЯНТНЫЕ СКОБКИ И ДИАГРАММЫ

2.1. Кумулянтные скобки

1. Введем специальные обозначения для кумулянтов, позволяющие существенно упростить оперирование с негауссовыми случайными величинами и их совокупностями [28, 29, 32].

Кумулянт первого порядка, совпадающий с моментом первого порядка, будем по-прежнему обозначать как $\kappa_1^{\xi} = \alpha_1^{\xi} = \langle \xi \rangle$.

Кумулянты второго порядка будем записывать как

$$\kappa_2^{\xi} \equiv \langle \xi, \xi \rangle, \quad \kappa_{1,1}^{\xi, \eta} \equiv \langle \xi, \eta \rangle.$$

Кумулянты третьего порядка обозначим

$$\begin{aligned}
\kappa_3^{\xi} &\equiv \langle \xi, \xi, \xi \rangle, \quad \kappa_{1,2}^{\xi, \eta} \equiv \langle \xi, \eta, \eta \rangle, \\
\kappa_{2,1}^{\xi, \eta} &\equiv \langle \xi, \xi, \eta \rangle, \quad \kappa_{1,1,1}^{\xi, \eta, \zeta} \equiv \langle \xi, \eta, \zeta \rangle.
\end{aligned}$$

В общем случае кумулянт порядка s , относящийся к совокупности случайных величин $\{\xi, \eta, \zeta, \dots, \rho\}$, запишем так ($\Sigma p_i = s$):

$$\kappa_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n}^{\xi, \eta, \zeta, \dots, \rho} \equiv \underbrace{\langle \xi, \xi, \dots, \xi \rangle}_{p_1} \underbrace{\langle \eta, \eta, \dots, \eta \rangle}_{p_2} \underbrace{\langle \rho, \rho, \dots, \rho \rangle}_{p_n}. \quad (2.1.1)$$

Скобку $\langle \dots \rangle$, в которой имеется хотя бы одна запятая, разделяющая случайные переменные, будем называть *кумулянтной скобкой*. По определению кумулянтная скобка с различными аргументами

$$\langle \xi, \eta, \zeta, \dots, \omega \rangle \equiv \kappa_{1,1,1, \dots, 1}^{\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega} \quad (2.1.2)$$

является тем совместным кумулянтном совокупности $\{\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega\}$, в который каждая случайная величина входит один раз.

Если одна и та же случайная величина входит в кумулянтную скобку многократно, то эту кумулянтную скобку для краткости будем записывать в виде

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\langle \xi, \xi, \dots, \xi \rangle}_{p_1} \underbrace{\langle \eta, \eta, \dots, \eta \rangle}_{p_2} \underbrace{\langle \rho, \rho, \dots, \rho \rangle}_{p_n} \equiv \\
&\equiv \langle \xi^{[p_1]}, \eta^{[p_2]}, \dots, \rho^{[p_n]} \rangle.
\end{aligned}$$

Следовательно, кумулянт (2.1.1) примет вид

$$\alpha_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n}^{\xi, \eta, \zeta, \dots, \rho} \equiv \langle \xi^{[p_1]}, \eta^{[p_2]}, \zeta^{[p_3]}, \dots, \rho^{[p_n]} \rangle. \quad (2.1.3)$$

Введение кумулянтных скобок позволяет рассматривать выражения типа $\langle f(\xi), \Psi(\eta) \rangle$, $\langle f(\xi), \Psi(\eta, \zeta) \rangle$, $\langle \xi, f(\eta), \Psi(\zeta) \rangle$ и т. п., которые играют большую роль в кумулянтном анализе случайных переменных и которые не могут быть непосредственно выражены через совместные кумулянты совокупности $\{\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega\}$. В то же время эти выражения могут быть записаны через соответствующие средние значения (см. ниже).

2. Нетрудно обнаружить, что введенное представление кумулянтов с помощью кумулянтных скобок аналогично записи моментов с помощью обычных скобок статистического усреднения. В самом деле, если раскрыть смысл совместного момента, то выражение

$$\begin{aligned} \alpha_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n}^{\xi, \eta, \zeta, \dots, \rho} &\equiv \underbrace{\langle \xi \xi \dots \xi \rangle}_{p_1} \underbrace{\langle \eta \eta \dots \eta \rangle}_{p_2} \dots \underbrace{\langle \rho \rho \dots \rho \rangle}_{p_n} \equiv \\ &\equiv \langle \xi^{p_1} \eta^{p_2} \dots \rho^{p_n} \rangle \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

полностью подобно (2.1.1), (2.1.3), а скобка

$$\langle \xi \eta \zeta \dots \omega \rangle \equiv \alpha_{1, 1, 1, \dots, 1}^{\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega} \quad (2.1.5)$$

аналогична скобке (2.1.2). Скобки статистического усреднения (2.1.4), (2.1.5) будем в дальнейшем называть *моментными скобками*.

Таким образом, «графическое» отличие кумулянтных скобок от моментных заключается в замене в последних точек, означающих операцию произведения, на запятые, смысл которых совершенно иной. Кумулянтные скобки, в отличие от моментных, не означают статистического усреднения выражения, стоящего в них. Это связано с тем, что если моменты есть действительно средние значения, то кумулянты представляют собой их нелинейную комбинацию.

2.2. Взаимосвязь кумулянтных и моментных скобок

1. Кумулянтные скобки связаны с моментными в полном соответствии со связью кумулянтов и моментов многомерного распределения. Так, например, формула (1.6.4), выражающая совместный момент третьего порядка совокупности трех случайных величин, через кумулянты, может быть записана на языке кумулянтных и моментных скобок следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \rangle &= \langle \xi, \eta, \zeta \rangle + \langle \zeta \rangle \langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta \rangle \langle \xi, \zeta \rangle + \langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta \rangle + \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle. \end{aligned}$$

Эту формулу можно записать еще более кратко, если вслед за Стратоновичем [5] ввести в употребление скобки симметризации $\{\dots\}_s$, означающие, например,

$$3\{\langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta \rangle\}_s \equiv \langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta \rangle + \langle \eta \rangle \langle \xi, \zeta \rangle + \langle \zeta \rangle \langle \xi, \eta \rangle.$$

При использовании этой скобки предыдущее выражение примет вид

$$\langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \rangle = \langle \xi, \eta, \zeta \rangle + 3\{\langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta \rangle\}_s + \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle.$$

Скобка симметризации вместе со стоящей перед ней цифрой представляет собой выражение, полностью симметричное относительно всех входящих в нее аргументов. При этом сама цифра указывает, сколько членов содержится в скобке в целом, если ее полностью раскрыть. В том случае, когда члены, входящие в скобку симметризации, сами содержат некоторый сомножитель, его выносят вперед и записывают отдельным множителем перед цифрой, указывающей число слагаемых. Так, например,

$$2 \cdot 6 \{\langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta, \vartheta \rangle\}_s \equiv 2\langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta, \vartheta \rangle + 2\langle \xi \rangle \langle \zeta \rangle \langle \eta, \vartheta \rangle + 2\langle \xi \rangle \langle \vartheta \rangle \langle \eta, \zeta \rangle + 2\langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle \langle \xi, \vartheta \rangle + 2\langle \eta \rangle \langle \vartheta \rangle \langle \xi, \zeta \rangle + 2\langle \zeta \rangle \langle \vartheta \rangle \langle \xi, \eta \rangle.$$

В том случае, когда все аргументы, входящие в скобки симметризации, одинаковы, эти скобки можно просто отбросить. Например,

$$3\{\langle \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle\}_s = 3\langle \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle, \\ 2 \cdot 6\{\langle \xi \rangle \langle \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle\}_s = 12\langle \xi \rangle^2 \langle \xi, \xi \rangle.$$

Введем еще одно упрощение. Для универсальности и краткости записи вместо различных случайных переменных (которыми, в частности, могут быть и детерминированные величины) будем использовать различные цифры: 1, 2, 3, ... Так например, под 1, 2, 3 можно понимать

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3; \xi, \eta, \zeta; f(\xi), \Psi(\eta), \varphi(\zeta); A, B, C \text{ и т. п.}$$

Другими словами, разными цифрами будут обозначены различные аргументы кумулянтных и моментных скобок (разумеется, среди этих аргументов могут быть и совпадающие переменные).

Учтя все это, приведем основные формулы, взаимосвязывающие кумулянтные и моментные скобки вплоть до шестого порядка. К этим формулам мы будем неоднократно обращаться.

2. Выражения кумулянтных скобок через моментные имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle 1, 2 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \rangle - \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle, \\ \langle 1, 2, 3 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \rangle - 3\{\langle 1 \rangle \langle 2 \cdot 3 \rangle\}_s + 2\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle, \\ \langle 1, 2, 3, 4 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle - 4\{\langle 1 \rangle \langle 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle\}_s - 3\{\langle 1 \cdot 2 \rangle \langle 3 \cdot 4 \rangle\}_s + 2 \cdot 6\{\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \cdot 4 \rangle\}_s - 6\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle, \\ \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \rangle - 5\{\langle 1 \rangle \langle 2 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times 3 \cdot 4 \cdot 5 \rangle_s - 10 \{ \langle 1 \cdot 2 \rangle \langle 3 \cdot 4 \cdot 5 \rangle_s + 2 \times \\
& \times 10 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \cdot 4 \cdot 5 \rangle_s + 2 \cdot 15 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \times \\
& \times 3 \rangle \langle 4 \cdot 5 \rangle_s - 6 \cdot 10 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \times \\
& \times 5 \rangle_s + 24 \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle \langle 5 \rangle, \\
& \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle = \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \rangle - \\
& - 6 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \rangle_s - 15 \{ \langle 1 \rangle \times \\
& \times 2 \rangle \langle 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \rangle_s + 2 \cdot 15 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \times \\
& \times 4 \cdot 5 \cdot 6 \rangle_s - 10 \{ \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \rangle \langle 4 \cdot 5 \cdot 6 \rangle_s + \\
& + 2 \cdot 60 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \cdot 3 \rangle \langle 4 \cdot 5 \cdot 6 \rangle_s - \\
& - 6 \cdot 20 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \cdot 5 \cdot 6 \rangle_s + 2 \cdot 15 \{ \langle 1 \times \\
& \times 2 \rangle \langle 3 \cdot 4 \rangle \langle 5 \cdot 6 \rangle_s - 6 \cdot 45 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \times \\
& \times 4 \rangle \langle 5 \cdot 6 \rangle_s + 24 \cdot 15 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle \langle 5 \times \\
& \times 6 \rangle_s - 120 \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle. \quad (2.2.1)
\end{aligned}$$

Эти формулы, показывающие, как конкретно кумулянтные скобки выражаются через средние значения произведений своих аргументов могли бы, в принципе, быть приняты и за определения самих кумулянтных скобок.

3. Приведем теперь обратные соотношения, представляющие моментные скобки через кумулянтные:

$$\begin{aligned}
& \langle 1 \cdot 2 \rangle = \langle 1, 2 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle, \\
& \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \rangle = \langle 1, 2, 3 \rangle + 3 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle \}_s + \\
& + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle, \\
& \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle + 4 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3, 4 \rangle \}_s + \\
& + 3 \langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle_s + 6 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle \}_s + \\
& + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle, \\
& \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle + \\
& + 5 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3, 4, 5 \rangle \}_s + 10 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4, 5 \rangle \}_s + \\
& + 10 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4, 5 \rangle \}_s + \\
& + 15 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 4, 5 \rangle \}_s + 10 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \times \\
& \times \langle 3 \rangle \langle 4, 5 \rangle \}_s + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle \langle 5 \rangle, \\
& \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle + \\
& + 6 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3, 4, 5, 6 \rangle \}_s + \\
& + 15 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4, 5, 6 \rangle \}_s + 10 \langle 1, 2, 3 \rangle \langle 4, \\
& 5, 6 \rangle_s + 15 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4, 5, 6 \rangle \}_s + \\
& + 60 \langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 4, 5, 6 \rangle_s + \\
& + 20 \{ \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4, 5, 6 \rangle \}_s + \\
& + 15 \{ \langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle \langle 5, 6 \rangle \}_s + \\
& + 45 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle \langle 5, 6 \rangle \}_s + \\
& + 15 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle \langle 5, 6 \rangle \}_s + \\
& + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle. \quad (2.2.2)
\end{aligned}$$

Из соотношений (2.2.1), (2.2.2) элементарно следуют как приведенные ранее формулы (1.2.4), (1.2.5), (1.3.2), (1.3.3), так и все им подобные. Таким образом, (2.2.1) и (2.2.2) представляют собой компактную форму записи взаимосвязи моментов и кумулянтов многомерного распределения.

4. Важные для понимания статистического смысла кумулянтов

формулы, выражающие кумулянтные скобки высших порядков через моментную скобку того же порядка и кумулянтные скобки низших порядков, получаются обращением соотношений (2.2.2):

$$\begin{aligned}
 \langle 1, 2 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \rangle - \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle, \\
 \langle 1, 2, 3 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \rangle - 3\{\langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle\}_s - \\
 &\quad - \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle, \\
 \langle 1, 2, 3, 4 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle - 4\{\langle 1 \rangle \langle 2, 3, 4 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 3\{\langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle\}_s - 6\{\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle\}_s - \\
 &\quad - \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle, \\
 \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \rangle - \\
 &\quad - 5\{\langle 1 \rangle \langle 2, 3, 4, 5 \rangle\}_s - 10\{\langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4, 5 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 10\{\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4, 5 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 15\{\langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 4, 5 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 10\{\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4, 5 \rangle\}_s - \\
 &\quad - \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle \langle 5 \rangle, \\
 \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \rangle - \\
 &\quad - 6\{\langle 1 \rangle \langle 2, 3, 4, 5, 6 \rangle\}_s - 15\{\langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4, 5, 6 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 15\{\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4, 5, 6 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 10\{\langle 1, 2, 3 \rangle \langle 4, 5, 6 \rangle\}_s - 60\{\langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 4, 5, 6 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 20\{\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4, 5, 6 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 15\{\langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle \langle 5, 6 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 45\{\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle \langle 5, 6 \rangle\}_s - \\
 &\quad - 15\{\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle \langle 5, 6 \rangle\}_s - \\
 &\quad - \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Ниже мы укажем, каким образом определяются коэффициенты перед скобками симметризации в (2.2.2) и в (2.2.3).

2.3. Свойства кумулянтных скобок

1. Пусть $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ — случайные величины из какой-либо совокупности $\mathcal{L}$, в то время как $a, b, c, \dots, g$ — детерминированные величины. Пусть также x — случайная величина, статистически независимая от всех величин, входящих в совокупность $\mathcal{L}$. Покажем, что кумулянтные скобки обладают следующими свойствами:

- 1) $\langle \xi, \eta, \zeta, \dots, \omega \rangle$ — симметрическая функция всех аргументов,
- 2) $\langle a\xi, b\eta, c\zeta, \dots, g\omega \rangle = abc \dots g \langle \xi, \eta, \zeta, \dots, \omega \rangle$,
- 3) $\langle \xi, \eta, \dots, \vartheta_1 + \vartheta_2, \dots, \omega \rangle = \langle \xi, \eta, \dots, \vartheta_1, \dots, \omega \rangle + \langle \xi, \eta, \dots, \vartheta_2, \dots, \omega \rangle$,
- 4) $\langle \xi, \eta, \dots, x, \dots, \omega \rangle = 0$,
- 5) $\langle \xi, \eta, \dots, a, \dots, \omega \rangle = 0$,
- 6) $\langle \xi + a, \eta + b, \zeta + c, \dots, \omega + g \rangle = \langle \xi, \eta, \zeta, \dots, \omega \rangle$.

(2.3.1)

Первое свойство следует из симметричности совместного кумулянта (2.1.2) по отношению к парам индексов $\binom{\xi}{1} \binom{\eta}{1} \dots \binom{\omega}{1}$. Оно означает, что кумулянтная скобка инвариантна к любой перестановке ее аргументов, например,

$$\langle \xi, \eta, \zeta, \dots, \omega \rangle = \langle \eta, \zeta, \omega, \dots, \xi \rangle = \langle \omega, \eta, \xi, \dots, \zeta \rangle = \dots$$

Второе и третье свойства кумулянтных скобок можно доказать на основании определения совместного кумулянта (1.6.2) (положив $n_1 = n_2 = \dots = n_N = 1$) и структуры логарифма характеристической функции (1.6.1). Из этих свойств следует, что кумулянтная скобка по отношению к какому-либо отдельному аргументу является линейным оператором:

$$\langle \xi, \eta, \dots, \sum_k a_k \vartheta_k, \dots, \omega \rangle = \sum_k a_k \langle \xi, \eta, \dots, \vartheta_k, \dots, \omega \rangle.$$

Это чрезвычайно упрощает оперирование с кумулянтными скобками.

Первые три свойства (2.3.1), очевидно, справедливы и для моментных скобок $\langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \dots \cdot \omega \rangle$.

Четвертое свойство доказывают следующим образом. Пусть цифры 1, 2, 3, ... обозначают какие-либо случайные величины из совокупности $\mathcal{L}$. Тогда из первой формулы (2.2.3) следует, что $\langle 1, x \rangle = 0$. Используя это, с помощью второй формулы (2.2.3) находим $\langle 1, 2, x \rangle = 0$. Из третьей формулы получим $\langle 1, 2, 3, x \rangle = 0$ и т. д. Учитывая теперь первое свойство (2.3.1), приходим к четвертому, смысл которого очевиден: совместный кумулянт какой-либо совокупности случайных величин равен нулю, если в эту совокупность входит случайная величина, статистически независимая от всех других.

Если теперь рассмотреть две взаимно независимые совокупности случайных величин $\mathcal{L}_1 = \{\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega\}$ и $\mathcal{L}_2 = \{x, y, z, \dots, \omega\}$, то аналогичным образом можно доказать, что обобщением четвертого свойства кумулянтных скобок является выражение

$$\langle \xi, \eta, \zeta, \dots, \omega, x, y, z, \dots, \omega \rangle = 0.$$

Пятое свойство легко получить как следствие четвертого, приняв во внимание, что детерминированную величину можно рассматривать как случайную, статистически независимую от всех других. Пятое свойство, как и первые три, существенно упрощает использование кумулянтных скобок.

Шестое свойство является следствием третьего и пятого.

Второе и шестое свойства показывают определенную инвариантность кумулянтных скобок. Эта инвариантность кумулянтов к переносу начала отсчетов и изменению масштабов случайных величин и послужила поводом к тому, что кумулянты называют также и *семиинвариантами* (см., например, [13, 14]).

Пример 2.3.1. Пусть случайная величина ξ претерпевает преобразование $\xi \rightarrow \xi + b$. Тогда

$$\kappa_s^{\xi+b} \equiv \langle \xi + b, \xi + b, \dots, \xi + b \rangle = \langle \xi, \xi, \dots, \xi \rangle \equiv \kappa_s^\xi.$$

Таким образом, кумулянты случайной величины (разумеется, начиная со второго) не изменяются при сдвиге случайной переменной на детерминированную величину.

Шестое свойство, следовательно, обобщает эту инвариантность на случай многомерного распределения.

2. Совпадение первых трех свойств (2.3.1) для кумулянтных и моментных скобок имеет далеко идущие последствия. Так, если какие либо выражения для моментов некоторого вероятностного распределения получены при использовании только первых трех свойств (2.3.1), например, при совершении линейных операций над аргументами моментных скобок, то в точности такие же выражения справедливы и для кумулянтных. По этой причине они могут быть получены из выражений для моментов простой заменой точек на запятые во всех моментных скобках данного выражения.

Пример 2.3.2. Пусть требуется найти кумулянты случайной величины $\zeta = a\xi + b\eta$. Решим сначала соответствующую задачу для моментов

$$\alpha_s^\zeta = \langle (a\xi + b\eta)^s \rangle = \left\langle \sum_{l=0}^s C_s^l (a\xi)^{s-l} (b\eta)^l \right\rangle = \sum_{l=0}^s C_s^l a^{s-l} b^l \alpha_{s-l, l}^{\xi, \eta}. \quad (2.3.2)$$

При получении этого выражения, т. е. при сведении моментной скобки

$$\langle (a\xi + b\eta)(a\xi + b\eta) \dots (a\xi + b\eta) \rangle \text{ к } \langle \xi^{s-l} \eta^l \rangle,$$

использовались только второе и третье свойства. Это значит, что теперь можно в правой и левой частях полученной формулы (2.3.2) заменить моментные скобки на кумулянтные. Это сразу же приведет нас к решению поставленной задачи:

$$\kappa_s^\zeta = \sum_{l=0}^s C_s^l a^{s-l} b^l \kappa_{s-l, l}^{\xi, \eta}. \quad (2.3.3)$$

Таким образом, кумулянт суммы $\zeta = a\xi + b\eta$ зависит не только от кумулянт каждой случайной величины в отдельности, но и от всех совместных кумулянтных.

В последующем изложении мы неоднократно будем использовать указанную возможность замены моментных скобок на кумулянтные.

3. Распространим некоторые свойства кумулянтных скобок на векторные случайные величины. Пусть задана совокупность случайных величин $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$. При этом будем иметь в виду, что вектор ξ есть вектор-столбец (матрица-столбец)

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix},$$

в то время как транспонированный ему вектор ξ^+ есть вектор-строка (матрица-строка) $\xi^+ = \|\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N\|$.

Среднее значение случайных векторов $\langle \xi \rangle$ и $\langle \xi^+ \rangle$ по определению есть векторы соответственно столбец и строка, компонентами которых служат средние значения $\langle \xi_1 \rangle, \langle \xi_2 \rangle, \dots, \langle \xi_N \rangle$.

Чтобы получить из двух случайных векторов ξ и η (обладающих, в общем случае, различным числом компонент), матрицу моментов второго порядка ξ следует матрично умножить на η^+ и результат усреднить. Тогда по правилам умножения матриц

$$\langle \xi \cdot \eta^+ \rangle = \|\langle \xi_i \eta_j \rangle\| = \begin{vmatrix} \langle \xi_1 \eta_1 \rangle & \langle \xi_1 \eta_2 \rangle & \dots & \langle \xi_1 \eta_M \rangle \\ \langle \xi_2 \eta_1 \rangle & \langle \xi_2 \eta_2 \rangle & \dots & \langle \xi_2 \eta_M \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \xi_N \eta_1 \rangle & \langle \xi_N \eta_2 \rangle & \dots & \langle \xi_N \eta_M \rangle \end{vmatrix}.$$

Свойство симметричности второго момента $\langle \xi \eta \rangle = \langle \eta \xi \rangle$ для матрицы вторых моментов выглядит, как легко проверить, так:

$$\langle \xi \cdot \eta^+ \rangle = \langle \eta \cdot \xi^+ \rangle^+, \quad \langle \xi \cdot \eta^+ \rangle^+ = \langle \eta \cdot \xi^+ \rangle.$$

Матрицу вторых кумулянтов $\|\langle \xi_i, \eta_j \rangle\|$ — *ковариационную матрицу* — можно построить совершенно аналогично:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta^+ \rangle &= \|\langle \xi_i, \eta_j \rangle\| = \\ &= \begin{vmatrix} \langle \xi_1, \eta_1 \rangle & \langle \xi_1, \eta_2 \rangle & \dots & \langle \xi_1, \eta_M \rangle \\ \langle \xi_2, \eta_1 \rangle & \langle \xi_2, \eta_2 \rangle & \dots & \langle \xi_2, \eta_M \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \xi_N, \eta_1 \rangle & \langle \xi_N, \eta_2 \rangle & \dots & \langle \xi_N, \eta_M \rangle \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Для матрицы кумулянтов второго порядка справедливы те же соотношения симметрии.

$$\langle \xi, \eta^+ \rangle = \langle \eta, \xi^+ \rangle^+, \quad \langle \xi, \eta^+ \rangle^+ = \langle \eta, \xi^+ \rangle.$$

Если теперь рассмотреть матрицы $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$, то с их помощью можно построить другие векторы $\xi = A\xi$, $\theta = B\eta$, если только число столбцов этих матриц равно числу строк соответствующих векторов (будем полагать эти условия выполненными). Матрица моментов второго порядка этих векторов равна

$$\langle \xi \cdot \theta^+ \rangle = \langle A\xi \cdot \eta^+ B^+ \rangle = A \langle \xi \cdot \eta^+ \rangle B^+.$$

Эта формула сохраняется и для кумулянта второго порядка:

$$\langle \xi, \theta^+ \rangle = \langle A\xi, \eta^+ B^+ \rangle = A \langle \xi, \eta^+ \rangle B^+.$$

Таким образом, не только детерминированные коэффициенты, но и детерминированные матрицы можно выносить за кумулянтные скобки.

Аналогичным образом можно показать, что

$$\begin{aligned} \langle (A + B) \xi, \eta^+ C \rangle &= A \langle \xi, \eta^+ \rangle C + B \langle \xi, \eta^+ \rangle C, \\ \langle A\xi, \eta^+ (C + D) \rangle &= A \langle \xi, \eta^+ \rangle C + A \langle \xi, \eta^+ \rangle D. \end{aligned}$$

2.4. Статистический смысл кумулянтов

1. Выше уже указывалось на то, что совместные кумулянты $\chi_{n,m}^{\xi,\eta}$ двух случайных величин ξ и η отображают их статистическую взаимосвязь. Так, в частности, совместный кумулянт второго порядка $\langle \xi, \eta \rangle$ описывает коррелированность случайных величин. Рассмотрим теперь более подробно тот смысл статистической взаимосвязи, который представлен кумулянтами высших порядков.

Начнем рассмотрение с анализа взаимосвязи трех случайных величин: ξ, η, ζ . Согласно второй формуле (2.2.3) совместный кумулянт $\chi_{1,1,1}^{\xi,\eta,\zeta}$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta, \zeta \rangle = & \langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta \rangle - \langle \eta \rangle \times \\ & \times \langle \xi, \zeta \rangle - \langle \zeta \rangle \langle \xi, \eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Это соотношение имеет глубокий смысл. Мы уже знаем, что кумулянты второго порядка $\langle \xi, \eta \rangle, \langle \xi, \zeta \rangle, \langle \eta, \zeta \rangle$ представляют корреляционную связь соответственно между случайными величинами ξ и η, ξ и ζ, η и ζ , так что если случайные величины ξ, η, ζ взаимно некоррелированы*), то

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \zeta \rangle = \langle \eta, \zeta \rangle = 0.$$

С другой стороны, если ξ, η, ζ вообще статистически независимы, то $\langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \rangle = \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle$. Поэтому кумулянт $\langle \xi, \eta, \zeta \rangle$ отличен от нуля, если только рассматриваемые случайные величины, во-первых, статистически зависимы и, во-вторых, если они зависимы более сложным образом, чем это имеет место при их взаимной корреляции. Следовательно, кумулянт $\langle \xi, \eta, \zeta \rangle$ описывает более сложную статистическую зависимость, нежели корреляция. Будем говорить, что кумулянт $\langle \xi, \eta, \zeta \rangle$ описывает *статистическую связь второго порядка* между случайными величинами ξ, η, ζ . В соответствии с этим кумулянт второго порядка $\langle \xi, \eta \rangle$ описывает *статистическую связь первого порядка* между ξ и η . Тем самым корреляция в нашей терминологии есть статистическая связь первого порядка, что соответствует ранее указанному понятию линейной корреляции. Совершенно очевидно, что статистические связи первого и второго порядка в определенном смысле независимы. Имеется в виду, что три случайные величины ξ, η и ζ в общем случае могут быть связаны статистической взаимосвязью второго порядка или нет и независимо от этого иметь или не иметь между собой те или иные статистические связи первого порядка.

Идея о том, что совместный кумулянт описывает статистическую связь соответствующего порядка, весьма плодотворна и подтверждается выписыванием формул для кумулянтов любого порядка. Так согласно третьей формуле (2.2.3) кумулянт $\langle \xi, \eta, \zeta, \theta \rangle$

*) Поскольку понятие коррелированности было введено для характеристики взаимосвязи двух случайных величин, то слова «взаимно некоррелированы» по существу эквивалентны словам «попарно некоррелированы».

следующим образом выражается через момент $\langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \vartheta \rangle$ и кумулянты низших порядков:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta, \zeta, \vartheta \rangle = & \langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \vartheta \rangle - 4\{\langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta, \vartheta \rangle\}_s - \\ & - 3\{\langle \xi, \eta \rangle \langle \zeta, \vartheta \rangle\}_s - 6\{\langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta, \vartheta \rangle\}_s - \\ & - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle \langle \vartheta \rangle. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Отсюда следует, что $\langle \xi, \eta, \zeta, \vartheta \rangle$ получается из $\langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \vartheta \rangle$ вычитанием всевозможных статистических связей второго порядка (их четыре), всевозможных статистических связей первого порядка (в различных комбинациях их девять) и, наконец, статистических связей нулевого порядка (по аналогии можно считать, что кумулянты первого порядка описывают связи нулевого порядка). Следовательно, все, что остается в $\langle \xi, \eta, \zeta, \vartheta \rangle$, является статистической связью *третьего* порядка. И эта связь между $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ может существовать или не существовать независимо от наличия статистических связей низших порядков между этими же случайными величинами.

Вышеприведенные толкования формул (2.4.1), (2.4.2) принадлежат Р. Л. Стратоновичу [5], назвавшему совместный кумулянт $\kappa_{1,1,1,1}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s}$ *корреляцией s-го порядка*.

Таким образом, четвертое свойство кумулянтных скобок (2.3.1) приобретает совершенно прозрачный смысл: поскольку кумулянт N -го порядка $\langle \xi, \eta, \dots, x, \dots, \omega \rangle$ представляет собой статистическую связь $(N - 1)$ -го порядка, взаимосвязывающую N случайных величин $\xi, \eta, \dots, x, \dots, \omega$, то он, очевидно, и должен быть равен нулю, если хотя бы одна из этих случайных величин (в данном случае x) статистически независима от всех других.

2. Приведенное толкование кумулянтов как статистических связей соответствующего порядка позволяет дать интересную и содержательную интерпретацию и моментам. Обратимся к формулам (2.2.2) и запишем их, например, для четырех случайных величин $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$:

$$\begin{aligned} \langle \xi \cdot \eta \rangle = & \langle \xi, \eta \rangle + \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle, \\ \langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \rangle = & \langle \xi, \eta, \zeta \rangle + 3\{\langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta \rangle\}_s + \\ & + \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle, \\ \langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \vartheta \rangle = & \langle \xi, \eta, \zeta, \vartheta \rangle + 4\{\langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta, \vartheta \rangle\}_s + \\ & + 3\{\langle \xi, \eta \rangle \langle \zeta, \vartheta \rangle\}_s + 6\{\langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta, \vartheta \rangle\}_s + \\ & + \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle \langle \vartheta \rangle. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Момент второго порядка $\langle \xi \cdot \eta \rangle$ «состоит» из слагаемого, представляющего статистическую связь первого порядка, существующую между ξ и η , и слагаемого, отражающего отсутствие каких-либо статистических связей между ξ и η . Момент третьего порядка $\langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \rangle$ содержит одно слагаемое, представляющее статистическую связь второго порядка, три слагаемых с линейной статистической связью и одно слагаемое, соответствующее статистиче-

ской независимости случайных величин. Аналогичная ситуация имеет место и для совместного момента четвертого порядка и т. д.

Важным обстоятельством является то, что все слагаемые в правой части входят в состав момента со знаком плюс. Это значит, что все совместные кумулянты можно рассматривать как «кирпичики», из которых строятся в соответствии с (2.4.3) совместные моменты. Причем в силу обнаруженного выше различного статистического смысла разных кумулянтов эти «кирпичики» можно рассматривать как некоторые, в определенной степени независимые элементы.

Таким образом, хотя совокупность случайных величин может описываться как набором моментов, так и набором кумулянтов и эти два набора формально эквивалентны, предпочтение, несомненно, следует отдать кумулянтам, ибо они, а не моменты, представляя собой своеобразные «независимые координаты» вероятностных распределений, имеющие четкий и самостоятельный смысл.

Последующие главы, где показывается, что существуют удобные уравнения, позволяющие довольно просто выражать различные средние (а не только моменты, как это было до сих пор) через кумулянты случайных величин, также несомненно подтверждают ту особую роль, которую играют кумулянты в статистическом описании случайных переменных.

3. Формулы (2.2.2), как и (2.4.3), справедливы при любых вероятностных распределениях случайных величин. Если задано какое-либо конкретное распределение совокупности случайных величин, т. е. если задан полный набор кумулянтов этой совокупности, то формулы (2.2.2) и, конечно, (2.4.3) также примут конкретный вид в зависимости от тех или иных значений кумулянтов.

Пусть, например, совокупность $\{\xi, \eta, \zeta, \vartheta\}$ является гауссовой, для которой все кумулянты порядка выше двух равны нулю. Тогда из (2.4.3) элементарно следует, что выражение для момента второго порядка не изменится, а остальные моменты примут вид

$$\begin{aligned} \langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \rangle &= 3 \{ \langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta \rangle \}_s + \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle, \\ \langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \vartheta \rangle &= 3 \{ \langle \xi, \eta \rangle \langle \zeta, \vartheta \rangle \}_s + \\ &+ 6 \{ \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta, \vartheta \rangle \}_s + \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \langle \zeta \rangle \langle \vartheta \rangle. \end{aligned}$$

4. Итак, совместные кумулянты описывают те или иные статистические связи, существующие между случайными величинами. Весьма важно теперь дать и количественное описание этих связей, т. е. дать меру статистической связи.

Для статистической связи второго порядка мы уже ввели количественную характеристику — это коэффициент корреляции, равный, согласно (1.4.2),

$$r_{\xi\eta} = \frac{\kappa_{1,1}^{\xi,\eta}}{\sqrt{\kappa_2^{\xi} \kappa_2^{\eta}}} = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}}.$$

Точно так же могут быть введены безразмерные коэффициенты, количественным образом характеризующие и статистические связи

высших порядков. Назовем *совместным кумулянтным коэффициентом* порядка $p_1 + p_2 + \dots + p_N$

$$\gamma_{p_1, p_2, \dots, p_N}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N} \equiv \frac{\kappa_{p_1, p_2, \dots, p_N}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N}}{\sigma_{\xi_1}^{p_1} \sigma_{\xi_2}^{p_2} \dots \sigma_{\xi_N}^{p_N}}. \quad (2.4.4)$$

При совпадении всех случайных величин (2.4.4) переходит в определенный ранее кумулянтный коэффициент для одной случайной величины (1.2.7). Итак, совместный кумулянтный коэффициент N -го порядка $\gamma_{1, 1, \dots, 1}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N}$ дает нам количественную характеристику статистической связи $(N - 1)$ -го порядка, существующей между N случайными величинами.

2.5. Кумулянтные диаграммы

1. Для кумулянтного анализа случайных переменных удобен метод кумулянтных диаграмм — метод графического изображения кумулянтных скобок. Многие взаимоотношения кумулянтных и моментных скобок находятся с помощью этих диаграмм гораздо проще, чем непосредственными вычислениями.

Рассмотрим совокупность произвольных случайных величин $\{\xi, \eta, \zeta, \theta, \dots\}$. Совместный кумулянт второго порядка будем обозначать диаграммой

$$\langle \xi, \eta \rangle \equiv \text{---} \overset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{\text{---}}} \text{---}$$

(Diagram: A horizontal line with two points labeled ξ and η . A curved line (arc) connects the two points above the line.)

Сплошная дуга, соединяющая случайные величины ξ и η , отображает статистическую связь первого порядка, существующую между ними.

Совместный кумулянт третьего порядка представим как

$$\langle \xi, \eta, \zeta \rangle \equiv \text{---} \overset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{\text{---}}} \text{---} \equiv \text{---} \overset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{\text{---}}} \text{---}$$

(Diagram: Two equivalent representations of a third-order cumulant. The first shows three points ξ, η, ζ on a line with arcs connecting ξ to η and η to ζ . The second shows arcs connecting ξ to ζ and ξ to η .)

Левая диаграмма, показывает, что три случайные величины взаимосвязаны связями второго порядка (от каждой случайной величины исходят две сплошные дуги). Для краткости будем также использовать упрощенную правую диаграмму, полностью эквивалентную левой.

В соответствии с этим кумулянты четвертого, пятого и шестого порядков изобразим следующими диаграммами:

$$\langle \xi, \eta, \zeta, \vartheta \rangle \equiv \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \vartheta \end{array} \equiv \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \vartheta \end{array},$$

$$\langle \xi, \eta, \zeta, \vartheta, \omega \rangle \equiv \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \vartheta \quad \omega \end{array}, \quad \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle \equiv \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array}.$$

Первый кумулянт случайной величины будем передавать перекрещенной изолированной точкой

$$\langle \xi \rangle \equiv \text{---} \times \text{---}.$$

которая не имеет каких-либо статистических связей с другими случайными величинами.

Произведения кумулянтов будем изображать кумулянтными диаграммами, находящимися на одной непрерывной горизонтальной оси, например,

$$\langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \equiv \begin{array}{c} \times \quad \times \\ \text{---} \text{---} \\ \xi \quad \eta \end{array}, \quad \langle \xi \rangle \langle \eta, \zeta \rangle \equiv \begin{array}{c} \times \quad \text{---} \overbrace{\text{---} \text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ \xi \quad \eta \quad \zeta \end{array},$$

$$\langle \xi, \zeta \rangle \langle \eta, \vartheta, \omega \rangle \equiv \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \vartheta \quad \omega \end{array}.$$

Суммы слагаемых представим суммами соответствующих диаграмм, например,

$$\langle \xi, \eta, \zeta \rangle + \langle \eta \rangle \langle \xi, \zeta \rangle \equiv \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ \xi \quad \eta \quad \zeta \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\text{---} \times \text{---}}^{\text{---}} \text{---} \\ \xi \quad \eta \quad \zeta \end{array}.$$

Моментные скобки будем отображать точками, находящимися на пунктирной линии и охваченными скобками статистического усреднения:

$$\langle \xi \cdot \eta \rangle \equiv \langle \text{---} \text{---} \text{---} \rangle, \quad \langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \rangle \equiv \langle \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rangle.$$

Таким образом произведения случайных величин на диаграммах будут выглядеть как точки, связанные пунктиром:

$$\xi \cdot \eta \equiv \text{---} \text{---} \text{---}, \quad \xi \cdot \eta \cdot \zeta \equiv \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}.$$

2. Изобразим теперь с помощью диаграмм структуру моментных скобок. Первой формуле (2.4.3) соответствует диаграмма

$$\langle \xi \eta \rangle \equiv \langle \overset{\cdot}{\xi} \cdots \eta \rangle = \overset{\text{arc}}{\xi \quad \eta} + \overset{\times}{\xi} \overset{\times}{\eta}, \quad (2.5.1)$$

второй

$$\begin{aligned} \langle \xi \eta \zeta \rangle \equiv \langle \overset{\cdot}{\xi} \cdots \eta \cdots \zeta \rangle = & \overset{\text{arc}}{\xi \quad \eta \quad \zeta} + \overset{\times}{\xi} \overset{\text{arc}}{\eta \quad \zeta} + \overset{\text{arc}}{\xi \quad \zeta} \overset{\times}{\eta} + \\ & + \overset{\text{arc}}{\xi \quad \eta} \overset{\times}{\zeta} + \overset{\times}{\xi} \overset{\times}{\eta} \overset{\times}{\zeta} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

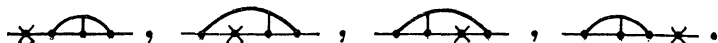
Построение этих диаграмм чрезвычайно просто и наглядно. В правые части равенств входят все возможные статистические связи которыми только и можно связать точки, входящие в моментные скобки. Так, в случае трех точек они могут быть связаны всего лишь одной связью, охватывающей все три точки (статистическая связь второго порядка), тремя связями, охватывающими по две точки (линейные статистические связи), и одним слагаемым, содержащим изолированные точки. Других комбинаций здесь не существует.

Таким образом, использование диаграммного изображения кумулянтов позволяет выяснить наиболее наглядным путем, какие статистические связи между случайными величинами могут содержаться в совместном моменте того или иного порядка.

Эта простота и наглядность приводит к тому, что с помощью диаграммы можно получить готовые формулы. В самом деле, возьмем, например, момент четвертого порядка и рассмотрим составляющие его связи. Очевидно, что существует лишь одна связь третьего порядка между четырьмя точками



Различных связей второго порядка между четырьмя случайными величинами, при которых одна точка остается изолированной, может быть только четыре:



Различных комбинаций связей только первого порядка может быть всего три:

вающих заданное число точек различными видами статистических связей*).

Диаграммы (2.5.1)—(2.5.3) справедливы для произвольного вероятностного распределения случайных величин. При уточнении вероятностного распределения рассматриваемые диаграммы принимают более конкретный вид. Так, например, если совокупность случайных величин является гауссовой, для которой существуют только связи первого порядка, то вместо (2.5.3) мы имеем

$$\langle \cdots \rangle = 3 \left\{ \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \right\}_s + 6 \left\{ \text{---} \times \times \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \right\}_s + \times \times \times \times \cdot$$

Если к тому же средние значения всех случайных величин равны нулю, то

$$\langle \cdots \rangle = 3 \left\{ \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} \right\}_s \cdot$$

что мгновенно приводит нас к известной формуле

$$\langle \xi \cdot \eta \cdot \zeta \cdot \vartheta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \langle \zeta, \vartheta \rangle + \langle \xi, \zeta \rangle \langle \eta, \vartheta \rangle + \langle \xi, \vartheta \rangle \langle \eta, \zeta \rangle.$$

3. В кумулянтном анализе случайных величин иногда приходится размыкать (выражать через кумулянты) кумулянтные скобки следующего вида:

$$\langle u \cdot v, x, y, z, \dots \rangle. \quad (2.5.4)$$

Приведем значения ряда подобных кумулянтных скобок и раскроем их смысл. Прежде всего, очевидно, что кумулянтная скобка (2.5.4) отлична от нуля только в том случае, когда x, y, z статистически взаимосвязаны с uv .

Не представляет труда непосредственно проверить, что для простейшего вида кумулянтной скобки (2.5.4) имеет место следующее тождество:

$$\langle x, uv \rangle = \langle x, u, v \rangle + \langle x, u \rangle \langle v \rangle + \langle x, v \rangle \langle u \rangle. \quad (2.5.5)$$

Это тождество иллюстрируется кумулянтными диаграммами

$$\text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} = \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \times + \times \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---}$$

*) Ниже, в гл. 3, будут приведены формулы, позволяющие легко вычислять числа, стоящие перед скобками симметризации.

Из (2.5.5) и диаграмм следует, что хотя кумулянтная скобка $\langle x, u, v \rangle$ по отношению к x, u, v и представляет связь второго порядка, она не будет обращаться в нуль и в том случае, когда имеются связи лишь первого порядка (например, между x и u), ибо из-за того, что u и v входят в виде произведения, между ними фактически существует еще одна связь (на диаграмме она показана пунктиром). Поэтому и последние два слагаемых диаграммы представляют как бы связи второго порядка, которые и завязывают между собой все три случайные величины.

Эта «пунктирная» связь имеется всегда, независимо от истинной статистической взаимосвязи величин u и v . Так, если u и v статистически независимы, то в (2.5.5) и на диаграмме пропадает лишь первое слагаемое, в то время как остальные слагаемые и, следовательно, $\langle x, uv \rangle$ будут, в общем случае, отличными от нуля.

4. Вышеприведенное «диаграммное толкование» соотношения (2.5.5) дает возможность сразу же с помощью аналогичных диаграмм раскрывать и более сложные выражения такого типа. Так, если рассмотреть кумулянтную скобку $\langle x, y, u, v \rangle$, то легко сообразить, что ее диаграммное выражение примет вид

$$\langle x, y, u, v \rangle = \text{diag}_1 + \text{diag}_2 + \text{diag}_3 + \text{diag}_4 + \text{diag}_5$$

Все остальные комбинации взаимосвязей не дадут завязывания всех четырех случайных величин.

Этой диаграмме соответствует тождество

$$\begin{aligned} \langle x, y, uv \rangle &= \langle x, y, u, v \rangle + \langle x, y, u \rangle \langle v \rangle + \\ &+ \langle x, y, v \rangle \langle u \rangle + \langle x, u \rangle \langle y, v \rangle + \\ &+ \langle x, v \rangle \langle y, u \rangle, \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

которое, конечно, может быть проверено непосредственно, хотя и не столь тривиально, как (2.5.5).

Поступая аналогично, получим для $\langle x, y, z, uv \rangle$ и $\langle x, y, z, w, uv \rangle$ диаграммы и соответствующие им формулы

$$\langle x, y, z, u, v \rangle = \text{diag}_1 + \text{diag}_2 + \text{diag}_3 + \text{diag}_4$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ x \quad y \quad z \quad w \quad u \quad v \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array} + \\
 + 4 \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array} \right\}_s + 6 \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array} \right\}_s + 4 \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array} \right\}_s,
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \langle x, y, z, uv \rangle &= \langle x, y, z, u, v \rangle + \langle x, y, z, u \rangle \langle v \rangle + \\
 &+ \langle x, y, z, v \rangle \langle u \rangle + 3 \{ \langle x, y, u \rangle \langle z, v \rangle \}_s + \\
 &+ 3 \{ \langle x, y, v \rangle \langle z, u \rangle \}_s, \\
 \langle x, y, z, w, uv \rangle &= \langle x, y, z, w, u, v \rangle + \\
 &+ \langle x, y, z, w, u \rangle \langle v \rangle + \langle x, y, z, w, v \rangle \langle u \rangle + \\
 &+ 4 \{ \langle x, y, z, u \rangle \langle w, v \rangle \}_s + 6 \{ \langle x, y, u \rangle \langle z, w, v \rangle \}_s + \\
 &+ 4 \{ \langle x, y, z, v \rangle \langle w, u \rangle \}_s.
 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Симметризация производится здесь по всем переменным, кроме u и v , т. е. она идет по точкам, не связанным пунктиром. Отметим, что непосредственная проверка двух последних формул носит чрезвычайно громоздкий характер.

5. Обобщая предыдущие выражения, можно прийти к следующей общей формуле размыкания кумулянтных скобок (2.5.4):

$$\begin{aligned}
 \langle x_1, x_2, \dots, x_s, uv \rangle &= \langle x_1, x_2, \dots, x_s, u, v \rangle + \\
 &+ \sum_{\lambda=0}^s C_s^\lambda \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_{s-\lambda}, u \rangle \langle x_{s-\lambda+1}, \dots, x_s, v \rangle \}_s.
 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Для частного случая $x_1 = x_2 = \dots = x_s = z$

$$\begin{aligned}
 \langle z^{[s]}, uv \rangle &= \langle z^{[s]}, u, v \rangle + \\
 &+ \sum_{\lambda=0}^s C_s^\lambda \langle z^{[s-\lambda]}, u \rangle \langle z^{[\lambda]}, v \rangle.
 \end{aligned}$$

Эта формула в обычном обозначении кумулянтов принимает вид

$$\kappa_{1,s}^{uv,z} = \kappa_{1,1,s}^{u,v,z} + \sum_{\lambda=0}^s C_s^\lambda \kappa_{1,s-\lambda}^{u,z} \kappa_{1,\lambda}^{v,z}. \tag{2.5.9}$$

2.6. Свойства кумулянтов одномерного распределения

1. Выясним теперь, какие значения могут принимать различные кумулянты одномерного распределения, в какой степени их можно выбирать независимо друг от друга и как они взаимосвязаны. То обстоятельство, что кумулянты должны подчиняться определенным

условиям, следует из положительной определенности характеристической функции

$$\Theta(u) = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k \right],$$

что не позволяет выбирать входящие в нее параметры $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_s, \dots$ произвольным образом. Вместе с этим следует заметить, что свойства кумулянтов изучены совершенно недостаточно. Из литературы известны лишь неравенства (см., например, [42])

$$|\kappa_s| \leq s^s \tilde{\mu}_s, \quad s = 1, 2, \dots$$

Входящие сюда центральные абсолютные моменты $\tilde{\mu}_s = \langle |x - \langle x \rangle|^s \rangle$ сами, очевидно, зависят от кумулянтов $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s$.

Очевидно, первый кумулянт $\kappa_1 = \langle x \rangle$ может принимать любые значения, лежащие в интервале $(-\infty, \infty)$, и не оказывает никакого влияния на значения высших кумулянтов в силу шестого свойства кумулянтных скобок. В то же время при нахождении необходимых и достаточных неравенств, налагаемых на высшие кумулянты, первый кумулянт необходимо варьировать [36]. Мы здесь для простоты анализа положим его равным нулю. Второй кумулянт для случайных величин всегда положителен $\kappa_2 > 0$. Это дает возможность оперировать с кумулянтными коэффициентами ($s = 3, 4, 5 \dots$)

$$\gamma_s \equiv \kappa_s / \kappa_2^{s/2},$$

имея в виду, что $\gamma_2 = 1$, а γ_1 выбирается равным нулю.

Удобным инструментом исследования свойств кумулянтов является неравенство Коши—Буняковского (1.4.4), которому подчиняется кумулянтная скобка второго порядка, поскольку она удовлетворяет всем условиям (1.4.3). Следовательно,

$$\langle x^m, x^n \rangle^2 \leq \langle x^m, x^m \rangle \langle x^n, x^n \rangle. \quad (2.6.1)$$

2. Положив в (2.6.1) $m = 1, n = 2$, получим

$$\langle x, x^2 \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle x^2, x^2 \rangle.$$

Раскрывая кумулянтные скобки, придем к $\kappa_3^2 \leq \kappa_2 (\kappa_4 + 2\kappa_2^2)$. Переходя к кумулянтным коэффициентам, найдем

$$\gamma_4 - \gamma_3^2 + 2 \geq 0. \quad (2.6.2)$$

Таким образом, коэффициенты асимметрии и эксцесса не могут выбираться совершенно независимо друг от друга. Одновременно кумулянтный коэффициент γ_3 сам по себе может принимать любые значения в $(-\infty, \infty)$.

На рис. 2.1 изображена область допустимых значений γ_3, γ_4 (она заштрихована), откуда следует, что коэффициент эксцесса всегда ограничен снизу

$$\gamma_4 \geq -2, \quad (2.6.3)$$

а коэффициент асимметрии может иметь большие (по модулю) значения лишь при больших положительных значениях γ_4 . Если $\gamma_4 = 0$, то $|\gamma_3| \leq \sqrt{2}$, если $\gamma_4 = -2$, то коэффициент асимметрии может быть только нулем.

3. Положив в (2.6.1) $m = 1$, $n = 3$, раскрывая кумулянтные скобки и переходя к кумулянтным коэффициентам, приходим к неравенству

$$\gamma_6 + 9\gamma_4 + 9\gamma_3^2 - \gamma_4^2 + 6 \geq 0, \quad (2.6.4)$$

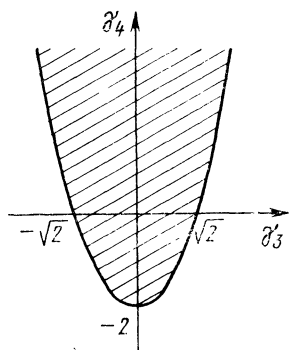


Рис. 2.1.

связывающему γ_3 , γ_4 и γ_6 при $\gamma_1 = 0$.

Чтобы определить интервал возможных значений γ_6 , объединим (2.6.2) и (2.6.4), исключив γ_3^2 . В результате приходим к неравенству

$$\gamma_6 \geq (\gamma_4 - 9)^2 - 105, \quad (2.6.5)$$

связывающему γ_4 с γ_6 . Отсюда получаем основное условие, налагаемое на γ_6 при любых значениях γ_3 и γ_4 :

$$\gamma_6 \geq -105. \quad (2.6.6)$$

Если у вероятностного распределения $\gamma_4 = 0$, то из (2.6.5) следует более сильное ограничение на γ_6 : $\gamma_6 \geq$

≥ -24 . Для симметричных распределений ($\gamma_3 = 0$) из (2.6.4) находим, что $\gamma_6 \geq -26$, 25. Если же рассматриваются распределения с $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$, то неравенство (2.6.4) дает самое сильное ограничение на кумулянтный коэффициент шестого порядка: $\gamma_6 \geq -6$.

4. Если далее мы возьмем $m = 2$, $n = 3$, то с помощью (2.6.1) получим неравенство

$$\gamma_4\gamma_6 + 2\gamma_6 + 15\gamma_4^2 + 9\gamma_4\gamma_3^2 + 45\gamma_4 - \gamma_5^2 - 18\gamma_3\gamma_5 - 63\gamma_3^2 + 30 \geq 0, \quad (2.6.7)$$

связывающее γ_3 , γ_4 , γ_5 и γ_6 при $\gamma_1 = 0$. Извлечение информации из этого неравенства является уже достаточно трудной задачей. Поэтому анализ условий, налагаемых на высшие кумулянтные коэффициенты неравенствами Коши—Буняковского, становится все более громоздким по мере возрастания порядка кумулянтов. Тем не менее можно показать, что все нечетные кумулянтные коэффициенты могут принимать сами по себе любые вещественные значения, а все четные кумулянтные коэффициенты ограничены снизу:

$$\gamma_{2n} \geq -A_{2n}. \quad (2.6.8)$$

Чтобы существенно продвинуться дальше и найти, например, значение A_8 , следует избрать другой путь, к которому мы сейчас и перейдем.

5. Покажем, что существует *граничное* вероятностное распределение, для которого неравенство Коши—Буняковского превращается в равенство, и что этим граничным распределением является *распределение бинарной альтернативы**):

$$W(x) = p\delta(x - a) + q\delta(x - b), \quad (2.6.9)$$

где $p + q = 1$, $p, q \geq 0$. Действительно, элементарные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \langle x^m, x^n \rangle &= \langle x^{m+n} \rangle - \langle x^m \rangle \langle x^n \rangle = \\ &= pq(b^m - a^m)(b^n - a^n). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \langle x^m, x^m \rangle &= pq(b^m - a^m)^2, \\ \langle x^n, x^n \rangle &= pq(b^n - a^n)^2. \end{aligned}$$

Следовательно **), $\langle x^m, x^n \rangle^2 = \langle x^m, x^m \rangle \langle x^n, x^n \rangle$. Таким образом, мы нашли такое вероятностное распределение, кумулянтные коэффициенты которого лежат на границе их возможных значений. Это означает, что неравенства (2.6.1) являются *необходимыми и достаточными* для того, чтобы числа $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \dots$ могли быть кумулянтными коэффициентами некоторого вероятностного распределения.

С помощью граничного распределения можно выявить интервалы изменения кумулянтных коэффициентов любых вероятностных распределений. В самом деле, для распределения (2.6.9) нетрудно отыскать следующие значения кумулянтных коэффициентов [$z = = q(1 - q)$]:

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \sqrt{z^{-1}(1 - 4z)} \operatorname{sgn}(1 - 2q), \quad \gamma_4 = 1/z - 6, \\ \gamma_5 &= (1/z - 12) \sqrt{(1 - 4z)/z} \operatorname{sgn}(1 - 2q), \\ \gamma_6 &= 1/z^2 - 30/z + 120, \\ \gamma_7 &= (1/z^2 - 60/z + 360) \sqrt{(1 - 4z)/z} \operatorname{sgn}(1 - 2q), \\ \gamma_8 &= 1/z^3 - 126/z^2 + 1680/z - 5040. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Приняв во внимание, что $z \in [0, 1/4]$, обнаружим, что все нечетные кумулянтные коэффициенты могут принимать любые значения в $(-\infty, \infty]$, в то время как все четные кумулянты ограничены снизу.

*) Особенность этого вероятностного распределения вытекает из свойства *положительной полуопределенности* (см. [41]) его характеристической функции.

**) Заметим, что вероятностное распределение бинарной альтернативы обращает в тождество и неравенство самого общего вида

$$\langle f(x), g(x) \rangle^2 \leq \langle f(x), f(x) \rangle \langle g(x), g(x) \rangle,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции случайной переменной.

зу минимальным значением, имеющим отрицательную величину. Минимизируя $\gamma_4, \gamma_6, \gamma_8$, найдем их нижние границы для *любых* вероятностных распределений:

$$\gamma_4 \geq -2, \quad \gamma_6 \geq -105, \quad \gamma_8 \geq -166214. \quad (2.6.11)$$

Это совпадает с (2.6.3), (2.6.6) и подтверждает (2.6.8). Вместе с тем, как следует из (2.6.10), нечетные кумулянты могут принимать большие значения по абсолютной величине (z близко к нулю) только при больших положительных значениях четных кумулянтов, как это уже отмечалось при анализе условия (2.6.2).

2.7. Свойства совместных кумулянтов

1. Рассмотрим теперь совместные кумулянты двумерного вероятностного распределения и найдем ограничения, налагаемые на их значения. Как и в предыдущем параграфе, будем работать с кумулянтными коэффициентами [см. (2.4.4)]

$$\gamma_{pq} \equiv \kappa_{pq} / \sigma_1^p \sigma_2^q,$$

полагая $\sigma_1^2 = \kappa_{20} > 0$, $\sigma_2^2 = \kappa_{02} > 0$, $\kappa_{10} = \kappa_{01} = 0$.

Используем опять неравенство Коши—Буняковского, которое для совокупности двух случайных величин запишем в виде

$$\langle x^m \cdot y^n, x^r \cdot y^s \rangle^2 \leq \langle x^m \cdot y^n, x^m \cdot y^n \rangle \langle x^r \cdot y^s, x^r \cdot y^s \rangle \quad (2.7.1)$$

и будем варьировать показатели степени m, n, r, s .

Свойства одного из кумулянтных коэффициентов, а именно, коэффициента корреляции, мы уже указали в § 1.4. Этот коэффициент по абсолютной величине не должен превышать единицу:

$$\gamma_{11}^2 \leq 1. \quad (2.7.2)$$

2. Полагая в (2.7.1) $m = r = s = 1, n = 0$, найдем

$$\langle x, xy \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle xy, xy \rangle,$$

откуда следует

$$\gamma_{21}^2 \leq \gamma_{22} + \gamma_{11}^2 + 1. \quad (2.7.3)$$

Меняя местами нижние индексы, получим

$$\gamma_{12}^2 \leq \gamma_{22} + \gamma_{11}^2 + 1. \quad (2.7.4)$$

Итак, мы отыскиали неравенства, связывающие совместные кумулянтные коэффициенты второго, третьего и четвертого порядков. Эти неравенства указывают область существования кумулянтов в трехмерном пространстве $\left(\begin{smallmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{12} \end{smallmatrix}, \gamma_{11}, \gamma_{22} \right)$, лежащую над гиперболическим параболоидом и ограниченную двумя плоскостями $\gamma_{11} = \pm 1$. Совмещая (2.7.2) с (2.7.3), (2.7.4) и исключая γ_{11} , придем к

$$\gamma_{21}^2 \leq \gamma_{22} + 2, \quad \gamma_{12}^2 \leq \gamma_{22} + 2. \quad (2.7.5)$$

Отсюда следует, в частности, что всегда $\gamma_{22} \geq -2$. В то же время общий вид нижней границы для γ_{22} на основании (2.7.3) таков: $\gamma_{22} \geq -(1 + \gamma_{11}^2)$. Для некоррелированных случайных величин $\gamma_{22} \geq -1$.

3. Подставляя в (2.7.1) $m = 2$, $n = r = 0$, $s = 1$, раскрывая кумулянтные скобки и меняя порядок индексов, получим

$$\gamma_{21}^2 \leq \gamma_{40} + 2, \quad \gamma_{12}^2 \leq \gamma_{04} + 2. \quad (2.7.6)$$

Заметим, что согласно (2.6.2) в этих неравенствах γ_{21} и γ_{12} можно заменить на γ_{30} , γ_{03} . Из (2.7.6) следует интересный вывод об ограничении совместных кумулянтов кумулянтами одномерных распределений. Так, если γ_{40} , γ_{04} принимают граничные значения, равные -2 , то все кумулянты третьего порядка должны обращаться в нуль: $\gamma_{30} = \gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{03} = 0$.

4. Записывая неравенство Коши—Буняковского в виде

$$\langle x^2, y^2 \rangle^2 \leq \langle x^2, x^2 \rangle \langle y^2, y^2 \rangle,$$

придем к неравенству

$$|\gamma_{22} + 2\gamma_{11}^2| \leq \sqrt{(\gamma_{40} + 2)(\gamma_{04} + 2)}, \quad (2.7.7)$$

которое дает ограничение на γ_{22} и сверху и снизу значениями кумулянтов одномерного распределения.

Если одномерные кумулянты четвертого порядка принимают граничные значения, равные -2 , то $\gamma_{22} = -2\gamma_{11}^2$ и, следовательно, γ_{22} принадлежит интервалу $[-2, 0]$.

Если случайные величины по отдельности гауссовы ($\gamma_{04} = \gamma_{40} = 0$), то совместный кумулянт γ_{22} подчиняется неравенствам

$$-(1 + \gamma_{11}^2) \leq \gamma_{22} \leq 2(1 - \gamma_{11}^2).$$

Таким образом, в общем случае совокупность двух гауссовых случайных величин может быть негауссовой (ср. с § 1.5). Если гауссовы случайные величины к тому же и некоррелированы, то $-1 \leq \gamma_{22} \leq 2$.

Ограниченность по модулю γ_{22} вследствие (2.7.3), (2.7.4) приводит к ограниченности совместных кумулянтов третьего порядка:

$$\gamma_{12}^2, \gamma_{21}^2 \leq 1 + \sqrt{(\gamma_{40} + 2)(\gamma_{04} + 2)}.$$

Это неравенство вместе с (2.7.6) показывает общую область определения для совместных кумулянтов третьего порядка, которая, как видно, совершенно не зависит от значений γ_{30} , γ_{03} .

5. Для рассмотрения свойств совместных кумулянтов γ_{31} , γ_{13} запишем неравенство Коши—Буняковского в виде

$$\langle x, y^3 \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y^3, y^3 \rangle,$$

что приведет нас к

$$\begin{aligned} (\gamma_{31} + 3\gamma_{11})^2 &\leq \gamma_{60} + 15\gamma_{40} + 9\gamma_{30}^2 + 15, \\ (\gamma_{13} + 3\gamma_{11})^2 &\leq \gamma_{06} + 15\gamma_{04} + 9\gamma_{03}^2 + 15. \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Таким образом, рассматриваемые кумулянты ограничены и сверху и снизу опять же кумулянтами одномерных распределений, но теперь уже более высоких порядков.

Объединяя (2.6.2) и (2.7.8), можно установить следующие неравенства:

$$|\gamma_{31}| \leq \sqrt{\gamma_{60} + 24\gamma_{40} + 33} + 3,$$

$$|\gamma_{13}| \leq \sqrt{\gamma_{06} + 24\gamma_{04} + 33} + 3.$$

Исходя из неравенства

$$\langle xy, x^2 \rangle^2 \leq \langle x^2, x^2 \rangle \langle xy, xy \rangle,$$

можно получить ограничение на совместные кумулянты γ_{31} , γ_{13} , определяемое только кумулянтами не выше четвертого порядка:

$$(\gamma_{31} + 2\gamma_{11})^2 \leq (\gamma_{40} + 2)(\gamma_{22} + \gamma_{11}^2 + 1),$$

$$(\gamma_{13} + 2\gamma_{11})^2 \leq (\gamma_{04} + 2)(\gamma_{22} + \gamma_{11}^2 + 1). \quad (2.7.9)$$

Если случайные величины гауссовы, то $\gamma_{31}^2, \gamma_{13}^2 \leq 8$.

6. Выше, в § 1.5, мы рассматривали совокупность двух негауссовых случайных величин, у которой был отличен от нуля лишь один совместный кумулянт γ_{11} . Подобная ситуация, как легко видеть, не противоречит полученным неравенствам. Вместе с тем, равенство нулю всех остальных совместных кумулянтов накладывает на γ_{11} дополнительные к (2.7.2) ограничения. Так, из (2.7.7) следует, что должно быть

$$\gamma_{11}^2 \leq (1/4)(\gamma_{40} + 2)(\gamma_{04} + 2). \quad (2.7.10)$$

При положительных γ_{40} , γ_{04} это неравенство не вносит дополнительных ограничений на γ_{11} , однако если $\gamma_{40}, \gamma_{04} < 0$, то (2.7.10) дает более жесткие условия, чем (2.7.2). Если же одномерные распределения таковы, что γ_{40}, γ_{04} имеют граничные значения, равные -2 , то коэффициент корреляции должен быть равен нулю (случайные величины должны быть независимы).

Из (2.7.8) следует еще одно ограничение на γ_{11} :

$$9\gamma_{11}^2 \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{60} + 15\gamma_{40} + 9\gamma_{30}^2 + 15 \\ \gamma_{06} + 15\gamma_{04} + 9\gamma_{03}^2 + 15 \end{array} \right\},$$

которое учитывает значение одномерных кумулянтных коэффициентов третьего, четвертого и шестого порядков.

7. Для совокупности двух случайных величин также существует *граничное* распределение, для которого неравенство Коши—Буняковского становится равенством. Им является двумерное распределение бинарной альтернативы

$$W(x, y) = p\delta(x - a)\delta(y - b) + q\delta(x - a_1)\delta(y - b_1). \quad (2.7.11)$$

Таким образом, неравенства (2.7.1) являются *необходимыми и достаточными* для того, чтобы величины γ_{pq} могли быть кумулянт-

ными коэффициентами некоторого двумерного вероятностного распределения.

Исследуя граничное распределение (2.7.11), можно получить следующие неравенства для совместных кумулянтных коэффициентов вида $\gamma_{2m, 2n}$:

$$\gamma_{22} \geq -2, \quad \gamma_{24}, \gamma_{42} \geq -105, \quad \gamma_{26}, \gamma_{44}, \gamma_{62} \geq -166214.$$

В то же время коэффициенты $\gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{13}, \gamma_{31}, \gamma_{14}, \gamma_{23}, \gamma_{32}, \gamma_{41}$ могут в общем случае принимать любые значения (их связь с $\gamma_{2m, 2n}$ подобна связи γ_3 с γ_4). Сравнивая полученные неравенства с (2.6.11) и проводя дальнейший анализ, можно обнаружить, что все кумулянтные коэффициенты вида $\gamma_{2m, 2n}$ имеют те же нижние границы, что и одномерные коэффициенты порядка $2(m + n)$.

По-видимому, это обстоятельство распространяется и на многомерные распределения: абсолютные ограничения снизу имеют только совместные кумулянтные коэффициенты вида $\gamma_{2n_1, 2n_2, \dots, 2n_N}$, их нижние границы совпадают с границами одномерных кумулянтных коэффициентов, имеющих порядки $2(n_1 + n_2 + \dots + n_N)$ соответственно.

8. Итак, проведенный в двух последних параграфах краткий анализ возможных значений кумулянтов и их взаимоотношений показал, что в бесконечномерном пространстве кумулянтов имеется определенное подпространство, назовем его P -множеством, точкам которого соответствует положительная определенность характеристических функций. Другими словами, каждой точке P -множества, представленной бесконечным набором кумулянтов, соответствует некоторое вероятностное распределение.

Выше мы уже указывали на то, что кумулянты могут считаться в определенной степени независимыми координатами вероятностного распределения. Теперь смысл слов «в определенной степени» становится совершенно прозрачным. А именно, если кумулянты принадлежат области допустимых значений, т. е. принадлежат P -множеству, то только внутри этого множества они и могут выбираться независимо друг от друга.

Вряд ли надо пояснять, что дальнейшее исследование структуры и границ таких P -множеств представляется чрезвычайно интересным и важным не только с теоретико-вероятностных позиций, но и для всех прикладных задач, имеющих дело с кумулянтным представлением случайных переменных.

2.8. Неполные кумулянтные скобки

1. Кроме введенных в § 2.1 кумулянтных скобок (назовем их для определенности *угловыми* скобками), весьма полезно ввести также и аппарат *неполных* или *круглых* кумулянтных скобок, особо удобный тогда, когда возникает проблема *размыкания* угловых кумулянтных скобок, т. е. задача их выражения через совместные кумулянты [28, 33].

Неполная кумулянтная скобка первого порядка для случайной переменной определяется как сама эта переменная:

$$(x) \equiv x. \quad (2.8.1)$$

Неполные кумулянтные скобки второго и третьего порядка для двух и соответственно трех случайных переменных определяются как

$$\begin{aligned} (x, y) &\equiv xy - \langle x \rangle y, \\ (x, y, z) &\equiv xyz - \langle x \rangle yz - \langle y \rangle xz - z \langle xy \rangle + \\ &+ 2 \langle x \rangle \langle y \rangle z. \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Выражая правые части (2.8.2) также через неполные кумулянтные скобки, можно формулам для (x, y) и (x, y, z) придать вид, схожий со структурой формул для соответствующих угловых кумулянтных скобок, а именно, можно записать

$$\begin{aligned} (x, y) &\equiv (xy) - \langle x \rangle (y), \\ (x, y, z) &\equiv (xyz) - \langle x \rangle (y, z) - \langle y \rangle (x, z) - \\ &- (z) \langle x, y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle (z). \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

Сравнивая (2.8.3) с первыми двумя формулами (2.2.3), нетрудно определить правила получения (2.8.3), а именно: чтобы из первых двух формул (2.2.3) получить (2.8.3), следует в (2.2.3) те угловые скобки, в которые входит последний аргумент, заменить на соответствующие круглые скобки (при этом, естественно, моментная скобка заменяется на неполную кумулянтную скобку первого порядка).

Это правило позволяет на основании формул (2.2.3) записать выражения круглых кумулянтных скобок и для высших порядков. Приведем эти выражения, заменяя, как и в (2.2.3), аргументы цифрами:

$$\begin{aligned} (1) &\equiv 1, \\ (1, 2) &\equiv (1 \cdot 2) - \langle 1 \rangle (2), \\ (1, 2, 3) &\equiv (1 \cdot 2 \cdot 3) - 2 \{ \langle 1 \rangle (2, 3) \}'_s - (3) \langle 1, 2 \rangle - \\ &- \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle (3), \\ (1, 2, 3, 4) &\equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) - 3 \{ \langle 1 \rangle (2, 3, 4) \}'_s - (4) \times \\ &\times \langle 1, 2, 3 \rangle - 3 \{ \langle 1, 2 \rangle (3, 4) \}'_s - 3 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle (3, 4) \}'_s - \\ &- 3 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle (4) \}'_s - \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle (4), \\ (1, 2, 3, 4, 5) &\equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) - 4 \{ \langle 1 \rangle (2, 3, 4, 5) \}'_s - \\ &- (5) \langle 1, 2, 3, 4 \rangle - 6 \{ \langle 1, 2 \rangle (3, 4, 5) \}'_s - \\ &- 4 \{ \langle 1, 2, 3 \rangle (4, 5) \}'_s - 6 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle (3, 4, 5) \}'_s - \\ &- 4 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3, 4 \rangle (5) \}'_s - 12 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle (4, 5) \}'_s - \\ &- 3 \{ \langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle (5) \}'_s - 4 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle (4, 5) \}'_s - \end{aligned}$$

3. Неполные кумулянтные скобки обладают такими свойствами:

1) $(\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega)$ — симметрическая функция всех аргументов, кроме последнего;

2) $(a\xi, b\eta, c\zeta, \dots, g\omega) = abc \cdot \dots \cdot g(\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega)$;

3) $(\xi, \eta, \dots, \vartheta_1 + \vartheta_2, \dots, \omega) = (\xi, \eta, \dots, \vartheta_1, \dots, \omega) + (\xi, \eta, \dots, \vartheta_2, \dots, \omega)$;

4) $(\xi, \eta, \dots, a, \dots, \omega) = 0$, если детерминированная величина a не стоит на месте последнего аргумента;

5) $(\xi, \eta, \dots, \zeta, \dots, a) = a(\xi, \eta, \dots, \zeta, \dots, 1) \neq 0$;

6) $(\xi + a, \eta + b, \dots, \zeta + c, \omega + g) = (\xi, \eta, \dots, \zeta, \omega) + (\xi, \eta, \dots, \zeta, g)$;

7) $\langle (\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega) \rangle = \langle \xi, \eta, \zeta, \dots, \omega \rangle$. (2.8.7)

Первые шесть свойств (2.8.7) легко доказываются на основании соответствующих свойств угловых кумулянтных скобок (3.2.1) и формул (2.8.4), (2.8.5). Из этих свойств следует, что по отношению к первым аргументам круглые кумулянтные скобки обладают всеми свойствами угловых скобок, кроме четвертого. Последнее обстоятельство связано с тем, что в то время как угловые кумулянтные скобки представляют собой детерминированные величины, круглые скобки являются некоторыми функциями от случайных переменных (и их усредненных значений).

Круглая кумулянтная скобка также является линейным оператором по отношению к каждому отдельному аргументу.

Седьмое свойство (2.8.7) — основное, ради которого по существу и вводятся неполные кумулянтные скобки. Оно элементарно следует из (2.8.4) и позволяет представлять угловую кумулянтную скобку в виде среднего значения от некоторой функции случайных переменных и их усредненных значений.

Таким образом, после усреднения неполные кумулянтные скобки превращаются в угловые и становятся симметрическими функциями всех аргументов. Это позволяет, в частности, усредняя (2.8.6), получить полезную формулу, связывающую моментные и угловые кумулянтные скобки произвольного порядка:

$$\begin{aligned} \langle 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N \rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1}^k \{ \langle 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \rangle \times \\ &\times \langle k+1, k+2, \dots, N \rangle_s' \}. \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

4. Поскольку круглые кумулянтные скобки (в отличие от угловых) представляют собой функции случайных переменных, их можно дифференцировать по этим переменным. Необходимость этого дифференцирования будет выяснена далее, а сейчас мы ограничимся лишь установлением правил дифференцирования.

Пусть аргументы неполных кумулянтных скобок, которые по-прежнему будем обозначать цифрами, зависят от случайных пере-

менных $x, y, \dots$ Имея в виду, что усредненные значения аргументов уже не зависят от случайных переменных, из первых двух формул (2.8.4) элементарно находим

$$\frac{\partial}{\partial x} (1) = (1'_x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1, 2) = (1'_x \cdot 2) + (1 \cdot 2'_x) - \langle 1 \rangle (2'_x) = (1'_x \cdot 2) + (1, 2'_x).$$

Таким образом, результаты дифференцирования неполных кумулянтных скобок также выражаются через неполные скобки, аргументами которых служат теперь частные производные. При этом в силу выделенности последнего аргумента его частная производная входит в результат дифференцирования иначе, чем частные производные других аргументов.

Выполняя дифференцирование круглых кумулянтных скобок высших порядков, получим следующие общие формулы:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1) = (1''_x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1, 2) = (1'_x \cdot 2) + 1, 2'_x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1, 2, 3) = (2, 1'_x, 3) + (1, 2'_x, 3) + (1, 2, 3'_x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1, 2, 3, 4) = (2, 3, 1'_x, 4) + (1, 3, 2'_x, 4) +$$

$$+ (1, 2, 3'_x, 4) + (1, 2, 3, 4'_x),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(1, 2, \dots, N) &= \sum_{k=1}^{N-1} (1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N-1, k'_x, N) + \\ &+ (1, 2, \dots, N-1, N'_x). \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

Закон дифференцирования неполных кумулянтных скобок очевиден: во-первых, дифференцирование всех аргументов идет по очереди, во-вторых, при дифференцировании любого аргумента, кроме последнего, порядок скобки понижается на единицу и при этом частная производная дифференцируемого аргумента умножается на последний аргумент; в-третьих, при дифференцировании последнего аргумента порядок скобки остается без изменений.

Пример 2.8.1. Пусть $f = f(x, y)$. Тогда из (2.8.9) элементарно находим

$$\frac{\partial}{\partial x}(x, f) = f + (x, f'_x),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x, f) = (x, f'_y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x, x, f) = 2(x, f) + (x, x, f'_x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x, y, f) = (y, f) + (x, y, f'_x),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x, y, f) = (x, f) + (x, y, f'_y).$$

5. Так как после дифференцирования неполных кумулянтных скобок мы снова приходим к ним, то, применяя (2.8.9) многократно, легко получить, например,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1) = (1''_{xx}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1, 2) = (1''_{xx} \cdot 2) + 2(1'_x \cdot 2'_x) + (1, 2''_{xx}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(1, 2, 3) &= 2(1'_x \cdot 2'_x \cdot 3) + 2(2, 1'_x \cdot 3'_x) + \\ &+ 2(1, 2'_x \cdot 3'_x) + (1, 2''_{xx} \cdot 3) + (2, 1''_{xx} \cdot 3) + (1, 2, 3''_{xx}). \end{aligned}$$

Пример 2.8.2. Для неполных кумулянтных скобок из примера 2.8.1 нетрудно найти следующие значения высших производных:

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s}(x, f) = s f_x^{(s-1)} + (x, f_x^{(s)}),$$

$$\frac{\partial^s}{\partial y^s}(x, f) = (x, f_y^{(s)}),$$

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s}(x, x, f) = s(s-1) f_x^{(s-2)} + 2s(x, f_x^{(s-1)}) + (x, x, f_x^{(s)}),$$

$$\frac{\partial^s}{\partial y^s}(x, x, f) = (x, x, f_y^{(s)}),$$

$$\frac{\partial^{s+p}}{\partial x^s \partial y^p}(x, f) = s f_{x, y}^{(s-1), (p)} + (x, f_{x, y}^{(s), (p)}),$$

$$\frac{\partial^{s+p}}{\partial x^s \partial y^p}(x, x, f) = s(s-1) f_{x, y}^{(s-2), (p)} + 2s(x, f_{x, y}^{(s-1), (p)}) + (x, x, f_{x, y}^{(s), (p)}). \quad (2.8.10)$$

6. Используя основное (седьмое) свойство неполных кумулянтных скобок, легко получить следующие важные формулы:

$$\left\langle \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x, f) \right\rangle = s \langle f_x^{(s-1)} \rangle + \langle x, f_x^{(s)} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^s}{\partial x^s}(x, x, f) \right\rangle &= s(s-1) \langle f_x^{(s-2)} \rangle + \\ &+ 2s \langle x, f_x^{(s-1)} \rangle + \langle x, x, f_x^{(s)} \rangle, \end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial^{s+p}}{\partial x^s \partial y^p}(x, f) \right\rangle = s \langle f_{x, y}^{(s-1), (p)} \rangle + \langle x, f_{x, y}^{(s), (p)} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^{s+p}}{\partial x^s \partial y^p}(x, x, f) \right\rangle &= s(s-1) \langle f_{x, y}^{(s-2), (p)} \rangle + \\ &+ 2s \langle x, f_{x, y}^{(s-1), (p)} \rangle + \langle x, x, f_{x, y}^{(s), (p)} \rangle, \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

КУМУЛЯНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Дифференциальные уравнения вероятностного распределения

1. Рассмотрим вероятностное распределение, заданное каким-либо конкретным бесконечным набором кумулянтов $\kappa = \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots\}$. В бесконечномерном пространстве кумулянтов этому набору соответствует точка, принадлежащая P -множеству (см. § 2.7). Другому конкретному набору кумулянтов соответствует другая точка P -множества. Таким образом на P -множестве мы можем задать общий вид вероятностного распределения

$$W(x) \equiv W(x; \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots) \equiv W(x; \kappa). \quad (3.1.1)$$

Назовем такую форму записи произвольного вероятностного распределения *канонической*. Этой форме распределения соответствует характеристическая функция

$$\begin{aligned} \Theta(u; \kappa) &\equiv \Theta(u; \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots) = \\ &= \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ju)^k}{k!} \kappa_k \right], \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

являющаяся положительно-определенной для всех точек P -множества.

Если изменять значение каких-либо кумулянтов из набора κ , то, вообще говоря, можно выйти за пределы P -множества. Будем предполагать, однако, в дальнейшем, что при том или ином варьировании кумулянтов, например, при вычислении производных $\partial W(x; \kappa) / \partial \kappa_s$, мы все время будем оставаться внутри P -множества.

2. Для получения дифференциальных уравнений, которым подчиняется каноническая форма вероятностных распределений, продифференцируем

$$W(x; \kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \Theta(u; \kappa) du$$

по какому-либо кумулянту κ_s :

$$\frac{\partial W(x; \kappa)}{\partial \kappa_s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \frac{\partial \Theta(u; \kappa)}{\partial \kappa_s} du.$$

Из (3.1.2) имеем

$$\frac{\partial \Theta(u; \kappa)}{\partial \kappa_s} = \frac{(ju)^s}{s!} \Theta(u; \kappa), \quad (3.1.3)$$

Поэтому

$$\frac{\partial W(x, \kappa)}{\partial \kappa_s} = \frac{1}{2\pi s!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} (ju)^s \Theta(u; \kappa) du.$$

Так как

$$\frac{\partial^s W(x; \kappa)}{\partial x^s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ju)^s e^{-jux} \Theta(u; \kappa) du,$$

то

$$\frac{\partial W(x; \kappa)}{\partial \kappa_s} = \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial^s W(x; \kappa)}{\partial x^s}. \quad (3.1.4)$$

Полагая здесь $s = 1, 2, 3, \dots$, получаем искомую систему дифференциальных уравнений в частных производных, которым подчиняется каноническая форма произвольного вероятностного распределения. Следует сказать, что, исключая гауссово распределение

$$W_{\Gamma}(x) = W(x; \kappa_1, \kappa_2) = (2\pi\kappa_2)^{-1/2} \exp[-(x - \kappa_1)^2/2\kappa_2], \quad (3.1.5)$$

ни одно из конкретных вероятностных распределений [см., например, (1.1.2), (1.1.3)] не представлено в канонической форме. Плотность вероятности обычно задается в виде некоторой функции x и каких-либо параметров, налагающих те или иные конкретные связи на кумулянты. Поэтому проверка уравнений (3.1.4) непосредственной подстановкой плотностей вероятности годится только для гауссова распределения (3.1.5), которое, как легко проверить, удовлетворяет системе (3.1.4) при $s = 1, 2$.

В заключение параграфа заметим, что при $s = 1$ из (3.1.4) следует уравнение

$$\frac{\partial W(x; \kappa)}{\partial \kappa_1} = - \frac{\partial W(x; \kappa)}{\partial x},$$

решением которого является очевидная зависимость канонической формы распределения от среднего значения:

$$W(x; \kappa) = W(x - \kappa_1; 0, \kappa_2, \kappa_3, \dots).$$

3.2. Кумулянтные уравнения

1. Рассмотрим каноническую форму вероятностного распределения $W(x, \kappa)$, однозначно представленного набором кумулянтов κ , и какую-либо функцию случайной переменной $f(x)$. Среднее статистическое этой функции

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) W(x; \kappa) dx = F(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots), \quad (3.2.1)$$

если оно не равно нулю (как, например, для нечетных функций и четных распределений), очевидно, зависит в общем случае от всех кумулянтов распределения. Наша задача и состоит в том, чтобы отыскать эту зависимость [не производя интегрирования согласно (3.2.1)].

Дифференцируя обе части (3.2.1) по произвольному кумулянту и принимая во внимание (3.1.4), найдем

$$\frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_s} = \frac{(-1)^s}{s!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial^s W(x; \kappa)}{dx^s} dx.$$

Множественно интегрируя по частям и учитывая, что плотность вероятности вместе со своими производными обращается в нуль на границах интегрирования, получим

$$\frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_s} = \frac{1}{s!} \int_{-\infty}^{\infty} W(x; \kappa) \frac{d^s f(x)}{dx^s} dx.$$

Последний интеграл является средним значением s -й производной от взятой нами функции $f(x)$.

Таким образом, мы получаем следующее основное и весьма важное для дальнейшего уравнение, связывающее среднее значение произвольной функции с кумулянтами распределения [30]:

$$\frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_s} = \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dx^s} f(x) \right\rangle. \quad (3.2.2)$$

2. Применяя полученное соотношение дважды, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_s^2} &= \frac{\partial}{\partial \kappa_s} \frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_s} = \\ &= \frac{1}{s!} \frac{\partial}{\partial \kappa_s} \left\langle \frac{d^s}{dx^s} f(x) \right\rangle = \frac{1}{(s!)^2} \left\langle \frac{d^{2s}}{dx^{2s}} f(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

В общем случае

$$\frac{\partial^n \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_s^n} = \frac{1}{(s!)^n} \left\langle \frac{d^{ns}}{dx^{ns}} f(x) \right\rangle. \quad (3.2.3)$$

Дальнейшее обобщение (3.2.2) на смешанные производные по разным кумулянтам также получается просто. Так, например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_p \partial \kappa_s} &= \frac{\partial}{\partial \kappa_p} \frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_s} = \frac{1}{s!} \frac{\partial}{\partial \kappa_p} \left\langle \frac{d^s}{dx^s} f(x) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{p! s!} \left\langle \frac{d^{p+s}}{dx^{p+s}} f(x) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^{n+m} \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_r^n \partial \kappa_p^m} = \frac{1}{(r!)^n (p!)^m} \left\langle \frac{d^{nr+mp}}{dx^{nr+mp}} f(x) \right\rangle. \quad (3.2.5)$$

Можно, наконец, записать в самом общем виде производную среднего значения произвольной функции по различным кумулянтам вероятностного распределения:

$$\frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_N} \langle f(x) \rangle}{\partial \kappa_{p_1}^{n_1} \cdot \partial \kappa_{p_2}^{n_2} \cdot \dots \cdot \partial \kappa_{p_N}^{n_N}} = \frac{1}{(p_1!)^{n_1} (p_2!)^{n_2} \cdot \dots \cdot (p_N!)^{n_N}} \times \\ \times \left\langle \frac{d^{n_1 p_1 + \dots + n_N p_N}}{dx^{n_1 p_1 + \dots + n_N p_N}} f(x) \right\rangle. \quad (3.2.6)$$

Уравнения (3.2.2)—(3.2.6) назовем для определенности *кумулянтными уравнениями*. Они будут играть основную роль в изучении преобразований случайных переменных. При этом следует отметить, что кумулянтные уравнения дают нам в руки довольно удобный вычислительный метод, который мы сейчас проиллюстрируем двумя примерами.

Пример 3.2.1. Наиболее простой случай использования полученных формул — это почти мгновенное получение выражений моментов распределения через его кумулянты [см. (1.2.5)]. Так, например, коэффициент перед членом $\kappa_1 \kappa_3$ в α_4 сразу находится согласно (3.2.4):

$$\frac{\partial^2 \langle x^4 \rangle}{\partial \kappa_1 \partial \kappa_3} = \frac{1}{1! 3!} \left\langle \frac{d^4}{dx^4} x^4 \right\rangle = \frac{4!}{3!} = 4.$$

С помощью (3.2.5) находим коэффициент перед $\kappa_1^2 \kappa_2$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \langle x^4 \rangle}{\partial \kappa_1^2 \partial \kappa_2} = \frac{1}{2 (1!)^2 2!} \left\langle \frac{d^4}{dx^4} x^4 \right\rangle = \frac{4!}{2 \cdot 2!} = 6 \text{ и т. д.}$$

Также просто находятся и коэффициенты разложения момента любого порядка по кумулянтам. В самом деле, общая структура момента N -го порядка имеет вид

$$\alpha_N = A \kappa_N + B \kappa_1 \kappa_{N-1} + C_1 \kappa_2 \kappa_{N-2} + C_2 \kappa_1^2 \kappa_{N-2} + \\ + D_1 \kappa_3 \kappa_{N-3} + D_2 \kappa_1 \kappa_2 \kappa_{N-3} + D_3 \kappa_1^3 \kappa_{N-3} + \dots + P \kappa_1^N.$$

С помощью полученных формул находим

$$A = \frac{\partial \alpha_N}{\partial \kappa_N} = \frac{\partial \langle x^N \rangle}{\partial \kappa_N} = \frac{1}{N!} \left\langle \frac{d^N}{dx^N} x^N \right\rangle = \frac{N!}{N!} = 1,$$

$$B = \frac{\partial^2 \alpha_N}{\partial \kappa_1 \partial \kappa_{N-1}} = \frac{1}{1! (N-1)!} \left\langle \frac{d^N}{dx^N} x^N \right\rangle = \frac{N!}{(N-1)!} = N,$$

$$C_1 = \frac{\partial^2 \alpha_N}{\partial \kappa_2 \partial \kappa_{N-2}} = \frac{N!}{2! (N-2)!} = \frac{(N-1) N}{2},$$

$$C_2 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 \alpha_N}{\partial \kappa_1^2 \partial \kappa_{N-2}} = \frac{N!}{2! (N-2)!} = \frac{(N-1) N}{2},$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 \alpha_N}{\partial \kappa_3 \partial \kappa_{N-3}} = \frac{N!}{3! (N-3)!},$$

$$D_2 = \frac{\partial^3 \alpha_N}{\partial \kappa_1 \partial \kappa_2 \partial \kappa_{N-3}} = \frac{N!}{2! (N-3)!}$$

$$D_3 = \frac{1}{3!} \frac{\partial^4 \alpha_N}{\partial \kappa_1^3 \partial \kappa_{N-3}} = \frac{N!}{3! (N-3)!},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N \alpha_N}{\partial \kappa_1^N} = \frac{N!}{N!} = 1.$$

Таким образом, N -й момент следующим образом выражается через кумулянты:

$$\alpha_N = \kappa_N + N \kappa_1 \kappa_{N-1} + \frac{(N-1) N}{2} \kappa_2 \kappa_{N-2} +$$

$$+ \frac{(N-1) N}{2} \kappa_1^2 \kappa_{N-2} + \frac{N!}{3! (N-3)!} \kappa_3 \kappa_{N-3} +$$

$$+ \frac{N!}{2! (N-3)!} \kappa_1 \kappa_2 \kappa_{N-3} + \frac{N!}{3! (N-3)!} \kappa_1^3 \kappa_{N-3} + \dots + \kappa_1^N.$$

Кумулянтные уравнения (3.2.2)—(3.2.6) часто могут использоваться именно как дифференциальные уравнения для искомых средних значений. Наипростейший пример — это отыскание среднего значения экспоненциальной функции для произвольного распределения.

Пример 3.2.2. Пусть $f(x) = e^x$. Тогда (3.2.2) дает

$$\frac{\partial \langle e^x \rangle}{\partial \kappa_s} = \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dx^s} e^x \right\rangle = \frac{\langle e^x \rangle}{s!}.$$

Решением этого уравнения является выражение $\langle e^x \rangle = B e^{\kappa_s/s!}$, где $B = B(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{s-1}, \kappa_{s+1}, \dots)$. Поскольку s может быть любым, то приходим к

$$\langle e^x \rangle = A \exp \left(\kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2!} + \frac{\kappa_3}{3!} + \dots + \frac{\kappa_s}{s!} + \dots \right),$$

где A — неизвестная постоянная величина. Чтобы ее найти, положим $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \dots = 0$. Этому набору кумулянтов соответствует детерминированное значение $x = 0$. Следовательно, $\langle e^0 \rangle = 1 = A$ и

$$\langle e^x \rangle = \exp \left(\kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2!} + \frac{\kappa_3}{3!} + \dots + \frac{\kappa_s}{s!} + \dots \right). \quad (3.2.7)$$

Заметим, что эта формула элементарно проверяется на основании (1.1.4) и (1.2.1), где следует положить $j\mu = 1$.

3. При выводе кумулянтных уравнений мы основывались на канонической форме вероятностного распределения. Поэтому при использовании этих уравнений для отыскания зависимости статистического среднего от кумулянтов (или параметров) какого-либо *конкретного* вероятностного распределения следует сначала получить

общую формулу $\langle f(x) \rangle = F(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots)$, а затем уже придавать кумулянтам те или иные конкретные значения (или выражать их через параметры распределения).

3.3. Обобщения на многомерные распределения

1. Не представляет большого труда обобщить полученные в предыдущем параграфе результаты и на многомерные распределения.

Записывая в канонической форме вероятностное распределение двух случайных величин $W(x, y; \dots, \kappa_{p,q}^{x,y}, \dots)$ однозначно представленное набором совместных кумулянтов, можно показать, аналогично предыдущему, что оно удовлетворяет системе дифференциальных уравнений ($p, q = 1, 2, 3, \dots$)

$$\frac{\partial W(x, y; \dots, \kappa_{p,q}^{x,y}, \dots)}{\partial \kappa_{p,q}^{x,y}} = \frac{(-1)^{p+q}}{p! q!} \frac{\partial^{p+q} W(x, y; \dots, \kappa_{p,q}^{x,y}, \dots)}{\partial x^p \partial y^q}. \quad (3.3.1)$$

Принимая во внимание (3.3.1) и дифференцируя двумерное среднее статистическое

$$\langle f(x, y) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) W(x, y; \dots, \kappa_{p,q}^{x,y}, \dots) dx dy$$

по совместному кумулянту $\kappa_{p,q}^{x,y}$, получим следующее основное кумулянтное уравнение для двумерного распределения [30]:

$$\frac{\partial \langle f(x, y) \rangle}{\partial \kappa_{p,q}^{x,y}} = \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} f(x, y) \right\rangle. \quad (3.3.2)$$

Используя это уравнение многократно, придем к

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \langle f(x, y) \rangle}{(\partial \kappa_{p,q}^{x,y})^n} &= \frac{1}{(p! q!)^n} \left\langle \frac{\partial^{np+nq}}{\partial x^{np} \partial y^{nq}} f(x, y) \right\rangle, \\ \frac{\partial^2 \langle f(x, y) \rangle}{\partial \kappa_{p,q}^{x,y} \partial \kappa_{r,s}^{x,y}} &= \frac{1}{p! q! r! s!} \left\langle \frac{\partial^{p+q+r+s}}{\partial x^{p+r} \partial y^{q+s}} f(x, y) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

В общем случае имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_N} \langle f(x, y) \rangle}{(\partial \kappa_{p_1,q_1}^{x,y})^{n_1} (\partial \kappa_{p_2,q_2}^{x,y})^{n_2} \dots (\partial \kappa_{p_N,q_N}^{x,y})^{n_N}} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(p_1! q_1!)^{n_1} (p_2! q_2!)^{n_2} \dots (p_N! q_N!)^{n_N}} \times \\
& \times \left\langle \frac{\partial^{p_1 n_1 + q_1 n_1 + p_2 n_2 + q_2 n_2 + \dots + p_N n_N + q_N n_N}}{\partial x^{p_1 n_1 + p_2 n_2 + \dots + p_N n_N} \partial y^{q_1 n_1 + q_2 n_2 + \dots + q_N n_N}} f(x, y) \right\rangle.
\end{aligned}
\tag{3.3.4}$$

Полученные кумулянтные уравнения составляют основу кумулянтного анализа совокупности двух случайных величин.

2. Для многомерных вероятностных распределений, однозначно представленных набором совместных кумулянтов $\kappa_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n}$, обобщением формулы (3.3.2) является формула

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle}{\partial \kappa_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n}} = \\
& = \frac{1}{p_1! p_2! \dots p_n!} \left\langle \frac{\partial^{p_1 + p_2 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\rangle,
\end{aligned}
\tag{3.3.5}$$

где $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — заданная функция совокупности случайных переменных.

Для ковариации двух различных случайных переменных из (3.3.5) следует уравнение

$$\frac{\partial \langle \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle}{\partial \kappa_{i,1}^{x_i, x_j}} = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\rangle.$$

Это выражение было получено ранее Брауном, который ошибочно полагал, что оно справедливо только для гауссовой совокупности [43].

Применяя формулу (3.3.5) многократно, легко записать уравнения и для других, более сложных производных, например,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^{k+l} \langle \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle}{\left[\partial \kappa_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n} \right]^k \left[\partial \kappa_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n} \right]^l} = \\
& = \frac{1}{[p_1! p_2! \dots p_n!]^k [q_1! q_2! \dots q_n!]^l} \times \\
& \times \left\langle \frac{\partial^{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)k + (q_1 + q_2 + \dots + q_n)l}}{\partial x_1^{p_1 k + q_1 l} \partial x_2^{p_2 k + q_2 l} \dots \partial x_n^{p_n k + q_n l}} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\rangle.
\end{aligned}
\tag{3.3.6}$$

3. Полученные формулы, рецепт использования которых тот же, что и ранее (см. § 3.2, п. 3), дают, например, возможность легко

находить разложение совместных моментов многомерного распределения через его кумулянты, что мы и проиллюстрируем двумя примерами.

Пример 3.3.1. Рассмотрим совместный момент третьего порядка

$$\alpha_{2,1}^{x,y} = \langle x^2 y \rangle = A_1 \kappa_{2,1}^{x,y} + A_2 \kappa_2^x \kappa_1^y + A_3 \kappa_{1,1}^{x,y} \kappa_1^x + A_4 (\kappa_1^x)^2 \kappa_1^y.$$

Для нахождения коэффициентов используем формулы (3.3.2)–(3.3.4):

$$\frac{\partial \langle x^2 y \rangle}{\partial \kappa_{2,1}^{x,y}} = A_1 = \frac{1!}{2! 1!} \left\langle \frac{d^2}{dx^2} x^2 \frac{d}{dy} y \right\rangle = \frac{2!}{2! 1!} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \langle x^2 y \rangle}{\partial \kappa_2^x \partial \kappa_1^y} = A_2 = \frac{2!}{2! 1!} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \langle x^2 y \rangle}{\partial \kappa_{1,1}^{x,y} \partial \kappa_1^x} = A_3 = \frac{2!}{1! 1! 1!} = 2,$$

$$\frac{\partial^3 \langle x^2 y \rangle}{\partial (\kappa_1^x)^2 \partial \kappa_1^y} = 2A_4 = \frac{2!}{(1!)^2 1!} = 2.$$

Таким образом, мы получаем вторую строчку формулы (1.3.2).

Пример 3.3.2. Если совместный момент третьего порядка содержит три случайные переменные, то

$$\alpha_{1,1,1}^{x,y,z} = \langle xyz \rangle = A_1 \kappa_{1,1,1}^{x,y,z} + A_2 \kappa_{1,1}^{x,y} \kappa_1^z + A_3 \kappa_{1,1}^{x,z} \kappa_1^y + A_4 \kappa_{1,1}^{y,z} \kappa_1^x + A_5 \kappa_y^x \kappa_1^y \kappa_1^z.$$

Отсюда с помощью (3.3.5), (3.3.6) находим

$$\frac{\partial \langle xyz \rangle}{\partial \kappa_{1,1,1}^{x,y,z}} = A_1 = \frac{1}{1! 1! 1!} \left\langle \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} xyz \right\rangle = \frac{1}{1! 1! 1!} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \langle xyz \rangle}{\partial \kappa_{1,1}^{x,y} \partial \kappa_1^z} = A_2 = \frac{1}{1! 1! 1!} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \langle xyz \rangle}{\partial \kappa_{1,1}^{x,z} \partial \kappa_1^y} = A_3 = \frac{1}{1! 1! 1!} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \langle xyz \rangle}{\partial \kappa_{1,1}^{y,z} \partial \kappa_1^x} = A_4 = \frac{1}{1! 1! 1!} = 1,$$

$$\frac{\partial^3 \langle xyz \rangle}{\partial \kappa_1^x \partial \kappa_1^y \partial \kappa_1^z} = A_5 = \frac{1}{1! 1! 1!} = 1.$$

Таким образом, мы доказали справедливость первой строчки в формуле (1.6.4). Аналогично вычисляется и вторая строчка.

В заключение параграфа отметим, что мы попутно получили простой способ нахождения коэффициентов разложения по кумулянтам как центральных совместных моментов μ , которые получаются из моментов α (при $\kappa_1 = 0$), так и квазимоментов β (при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$).

3.4. Размыкание моментных скобок

1. Полученные кумулянтные уравнения позволяют решать вопрос о том, как конкретно может выражаться среднее значение $\langle \Psi(x, y, z, \dots, \omega) \rangle$ для произвольного вида функции $\Psi(x, y, z, \dots, \omega)$ через $\kappa_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N}^{x, y, z, \dots, \omega}$. Это конкретное представление статистического среднего через совместные кумулянты совокупности будем называть операцией *размыкания* средних или размыканием моментных скобок. Проблема размыкания средних возникает всякий раз, когда мы стремимся получить некоторые замкнутые системы уравнений для одних только кумулянтов случайных переменных и когда в первоначальные уравнения, кроме кумулянтов, входят также и различные средние.

Примерами размыкания моментных скобок могут служить полученные выше формулы разложения моментов через кумулянты, а также приведенные в приложении I формулы (I.6), (I.7) представляющие средние значения произвольных функций $\langle \Psi(\xi) \rangle$, $\langle \Psi(\xi, \eta) \rangle$ в виде рядов по комбинациям кумулянтов их аргументов.

Среднее значение произвольной функции $\langle \Psi(x, y, z, \dots, \omega) \rangle$ почти всегда можно разложить в многомерный ряд по степеням произведений совместных кумулянтов $\kappa_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N}^{x, y, z, \dots, \omega}$, а коэффициенты этого ряда вычислить с помощью кумулянтных уравнений. Однако практическая ценность такого разложения, в общем случае, невелика. Вместе с тем, имеются и такие функции $\Psi(x, y, z, \dots, \omega)$, средние значения которых без особой громоздкости могут быть представлены простыми рядами кумулянтов.

Некоторые из этих полезных формул размыкания средних мы и приведем в настоящем параграфе.

2. Прежде всего, докажем следующую важную формулу, справедливую для двух случайных величин x, y , имеющих произвольное совместное распределение. Пусть $f(y)$ — заданная функция. Тогда

$$\begin{aligned} \langle x f(y) \rangle &= \langle f \rangle \langle x \rangle + \langle f' \rangle \langle x, y \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle f'' \rangle \langle x, y, y \rangle + \dots + \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \langle x, y^{[s]} \rangle + \dots = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \langle x, y^{[s]} \rangle. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Для доказательства воспользуемся формулой (3.3.2):

$$\frac{\partial \langle x f(y) \rangle}{\partial \kappa_{p, q}^{x, y}} = \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} x f(y) \right\rangle.$$

Очевидно, правая часть будет отлична от нуля только для $p \leq 1$. Случаю $p = 0$ соответствует зависимость $\langle x f(y) \rangle$ от кумулянтов

случайной величины y . Его мы не будем рассматривать, поскольку нас интересует разложение $\langle xf(y) \rangle$ по *совместным* кумулянтам. Поэтому единственные совместные кумулянты, от которых зависит среднее $\langle xf(y) \rangle$, есть кумулянты вида $\kappa_{1, q}^{x, y}$. Производная по ним равна

$$\frac{\partial \langle xf(y) \rangle}{\partial \kappa_{1, q}^{x, y}} = \frac{1}{q!} \langle f^{(q)}(y) \rangle. \quad (3.4.2)$$

Следовательно, среднее $\langle xf(y) \rangle$ зависит от $\kappa_{1, q}^{x, y}$ ($q = 1, 2, 3, \dots$) *линейно*, с коэффициентами (3.4.2). Если, с другой стороны, x и y статистически независимы, то $\langle xf(y) \rangle = \langle x \rangle \langle f(y) \rangle$. Так мы однозначным образом получаем (3.4.1).

Эта формула имеет глубокий смысл. Она разлагает $\langle xf(y) \rangle$ в ряд по степеням статистической связи x и y . Если, например, в совокупности $\{x, y\}$ отличны от нуля только статистические связи первого порядка (т. е. если совокупность $\{x, y\}$ гауссова), то все совместные кумулянты $\kappa_{1, q}^{x, y}$ с $q > 1$ равны нулю, и мы приходим к известной формуле [44]

$$\langle xf(y) \rangle = \langle f(y) \rangle m_x + \langle f'(y) \rangle B_{xy}. \quad (3.4.3)$$

Если $x = y$, то (3.4.1) приводит нас к

$$\langle xf(x) \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \kappa_{s+1}^x. \quad (3.4.4)$$

Если случайная величина x гауссова, то

$$\langle xf(x) \rangle = \langle f(x) \rangle m_x + \langle f'(x) \rangle D_x. \quad (3.4.5)$$

Заметим, что две последние формулы не могут, вообще говоря, считаться настоящими формулами размыкания, поскольку от тех кумулянтов, по которым ведется разложение, зависят и коэффициенты разложения.

Аналогично с помощью кумулянтных уравнений для совокупности многих случайных величин можно доказать справедливость формул:

$$\begin{aligned} \langle xf(y, z) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \frac{\partial^{k+l}}{\partial y^k \partial z^l} f(y, z) \kappa_{1, k, l}^{x, y, z}, \\ \langle xf(y_1, y_2, \dots, y_N) \rangle &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_N=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_N!} \times \\ &\times \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_N}}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_N^{k_N}} f(y_1, y_2, \dots, y_N) \right\rangle \kappa_{1, k_1, k_2, \dots, k_N}^{x, y_1, y_2, \dots, y_N}. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Для гауссовых совокупностей эти разложения принимают вид

$$\begin{aligned}\langle xf(y, z) \rangle &= \langle f \rangle \langle x \rangle + \langle f'_y \rangle \langle x, y \rangle + \langle f'_z \rangle \langle x, z \rangle, \\ \langle xf(y_1, y_2, \dots, y_N) \rangle &= \langle f \rangle \langle x \rangle + \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial f}{\partial y_k} \right\rangle \langle x, y_k \rangle.\end{aligned}\quad (3.4.7)$$

3. Рассмотрим теперь моментную скобку $\langle xyf(z) \rangle$ и разложим ее по кумулянтам совокупности $\{x, y, z\}$. С помощью формулы (3.4.1), заменяя x и y соответственно на xy и z , сразу же найдем, что

$$\langle xyf(z) \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \langle xy, z^{[s]} \rangle.$$

Кумулянтную скобку в правой части раскрываем с помощью (2.5.9):

$$\langle xy, z^{[s]} \rangle = \kappa_{1,1}^{x,y,z} + \sum_{k=0}^s C_s^k \kappa_{1,k}^{x,z} \kappa_{1,s-k}^{y,z}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}\langle xyf(z) \rangle &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \times \\ &\times \left[\langle x, y, z^{[s]} \rangle + \sum_{k=0}^s C_s^k \langle x, z^{[k]} \rangle \langle y, z^{[s-k]} \rangle \right].\end{aligned}\quad (3.4.8)$$

Если функция зависит от двух аргументов, то разложение среднего значения $\langle xyf(w, z) \rangle$ по совместным кумулянтам совокупности $\{x, y, z, w\}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\langle xyf(w, z) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \left\langle \frac{\partial^{k+l}}{\partial w^k \partial z^l} f(w, z) \right\rangle \times \\ &\times \left[\langle w^{[k]}, y^{[l]}, x, y \rangle + \right. \\ &\left. + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l C_k^i C_l^j \langle w^{[i]}, z^{[j]}, y \rangle \langle w^{[k-i]}, z^{[l-j]}, x \rangle \right].\end{aligned}\quad (3.4.9)$$

Для гауссовой совокупности случайных величин $\{x, y, z, w\}$ из (3.4.8), (3.4.9) следует, что

$$\begin{aligned}\langle xyf(z) \rangle &= \langle f \rangle [\langle x, y \rangle + \langle x \rangle \langle y \rangle] + \langle f' \rangle [\langle x \rangle \langle y, z \rangle + \langle y \rangle \langle x, z \rangle] + \langle f'' \rangle \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle\end{aligned}\quad (3.4.10)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \langle xyf(w, z) \rangle &= \langle f \rangle [\langle x, y \rangle + \langle x \rangle \langle y \rangle] + \langle f'_z \rangle \times \\ &\times [\langle x \rangle \langle y, z \rangle + \langle y \rangle \langle x, z \rangle] + \langle f'_w \rangle [\langle x \rangle \langle y, \\ &w \rangle + \langle y \rangle \langle x, w \rangle] + \langle f''_{zz} \rangle \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle + \\ &+ \langle f''_{ww} \rangle \langle x, w \rangle \langle y, w \rangle + \langle f''_{wz} \rangle [\langle x, [w \langle y, z \rangle + \\ &+ \langle x, z \rangle] \langle y, w \rangle]; \end{aligned}$$

Пример 3.4.1. Пусть совокупность $\{x, y\}$ гауссова с $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$ и заданными значениями $D_x, \langle xy \rangle, D_y$. Легко доказать справедливость формулы ([35], с. 641)

$$\langle xf'_y(y) \rangle = \langle xy \rangle D_x^{-1} \langle yf'_x(x) \rangle, \quad (3.4.11)$$

позволяющей двукратное интегрирование заменять однократным. В самом деле, подставляя в (3.4.3) значение средней производной $\langle f'_y(y) \rangle$ из (3.4.5), мы приходим к (3.4.11).

Для гауссовой совокупности трех случайных величин $\{x, y, z\}$ с $\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle = 0$ аналогично доказывается формула ([35], с. 641), в которой уже трехкратное интегрирование заменяется однократным

$$\langle xyf(z) \rangle = D_z^{-1} [D_z \langle xy \rangle - \langle xz \rangle \langle yz \rangle] \langle f'_z(z) \rangle + \langle xz \rangle \langle yz \rangle D_z^{-2} \langle z^2 f(z) \rangle.$$

Глава 4

КУМУЛЯНТНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

4.1. Постановка задачи

1. Пусть имеется совокупность N случайных величин ξ , представленная плотностью вероятности $W_\xi(x)$, и преобразование $\xi \rightarrow \eta$, заданное соотношениями ($j = \overline{1, M}$):

$$\eta_j = f_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N).$$

Требуется отыскать плотность вероятности $W_\eta(y)$. Такова самая общая постановка задачи о преобразовании совокупности случайных величин. Следует, однако, сказать, что в общем случае произвольных функций f_j практическое решение этой задачи безнадежное дело даже для двумерных случайных величин. Только в том случае, когда обратные функции $\xi_i = g_i(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M)$ всюду однозначны, не представляет особого труда выразить W_η через W_ξ (см., например, [5, 13]).

Вместе с тем для большого круга конкретных ситуаций нет необходимости обращаться к W_η , а достаточно выяснить лишь некоторые статистические характеристики η , такие, например, как моменты и кумулянты, предположив, их известными для ξ .

При такой постановке задачи, а именно ею мы, в основном, и ограничимся, развитая в предыдущих главах техника кумулянт-

ного анализа случайных величин позволит нам значительно продвинуться вперед.

Мы начнем с кумулянтного анализа линейных преобразований, несмотря на то, что для них легко может быть записано общее выражение для W_η . Дело в том, что уже для линейных преобразований отыскание «выходных» кумулянтов κ^η непосредственно через «входные» κ^ξ является несравненно более простой операцией, нежели их вычисление с помощью W_η .

4.2. Линейные преобразования

1. Пусть совокупность N случайных величин ξ подвергается линейному преобразованию

$$\eta = A\xi, \quad (4.2.1)$$

заданному матрицей $A = \|a_{ik}\|$, т. е. ($j = \overline{1, M}$; $k = \overline{1, N}$):

$$\eta_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} \xi_k. \quad (4.2.2)$$

Усредняя обе части (4.2.2), получим

$$\kappa_1^\eta = \sum_{k=1}^N a_{jk} \kappa_1^{\xi_k}. \quad (4.2.3)$$

Так преобразуются кумулянты первого порядка. Если ввести векторы-столбцы первых кумулянтов, то (4.2.3) примет вид векторного преобразования $\kappa_1^\eta = A\kappa_1^\xi$. Итак, средние значения преобразуются как сами случайные величины.

Обратимся к кумулянтам второго порядка

$$\kappa_2^{\eta_i} = \langle \eta_i, \eta_i \rangle, \quad \kappa_{1,1}^{\eta_i, \eta_j} = \langle \eta_i, \eta_j \rangle.$$

Используя свойства кумулянтных скобок, получим

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^N a_{im} a_{jl} \langle \xi_m, \xi_l \rangle. \quad (4.2.4)$$

Выходные кумулянты второго порядка, как и средние, являются линейной комбинацией входных кумулянтов. Если использовать ковариационную матрицу (см. § 2.3)

$$\kappa_2^\eta \equiv \langle \eta, \eta^+ \rangle \equiv \| \langle \eta_i, \eta_j \rangle \|,$$

то преобразование (4.2.4) может быть записано в матричной форме:

$$\kappa_2^\eta = \langle A\xi, (A\xi)^+ \rangle = \langle A\xi, \xi^+ A^+ \rangle = A\kappa_2^\xi A^+. \quad (4.2.5)$$

Для корреляционной матрицы — матрицы вторых моментов

$$A_2^\eta \equiv \langle \eta\eta^+ \rangle \equiv \| \langle \eta_i \eta_j \rangle \|^$$

также получим аналогичное соотношение $A_2^\eta = A A_2^\xi A^+$.

Для кумулянтов третьего порядка на основании свойств (2.3.1)

$$\langle \eta_i, \eta_j, \eta_k \rangle = \sum_l \sum_m \sum_n a_{il} a_{jm} a_{kn} \langle \xi_l, \xi_m, \xi_n \rangle.$$

В общем случае

$$\langle \eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_s} \rangle = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_s} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_s j_s} \langle \xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_s} \rangle \quad (4.2.6)$$

Итак, выходной набор кумулянтов s -го порядка для линейной системы определяется входным набором кумулянтов того же s -го порядка. Это значит, что линейное преобразование обладает *кумулянтной инвариантностью*. Ее смысл следующий: если у случайной величины ξ все кумулянты, скажем, p -го порядка равны нулю, то и у η кумулянты того же p -го порядка будут равными нулю.

Отсюда в качестве тривиального вывода получаем известное свойство гауссовых случайных величин: при любом линейном преобразовании гауссова совокупность остается гауссовой.

Закон преобразования кумулянтов (4.2.6) справедлив и для моментов:

$$\langle \eta_{i_1} \cdot \eta_{i_2} \cdot \dots \cdot \eta_{i_s} \rangle = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_s} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_s j_s} \langle \xi_{j_1} \xi_{j_2} \cdot \dots \cdot \xi_{j_s} \rangle.$$

По такому закону преобразуются произведения векторных компонент при линейном преобразовании координат. А это значит (см., например, [41]), что $\langle \eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_s} \rangle$, так же как и $\langle \eta_{i_1} \cdot \eta_{i_2} \cdot \dots \cdot \eta_{i_s} \rangle$, могут считаться компонентами некоторого симметрического тензора ранга s . По этой причине кумулянт и момент порядка s можно считать тензорами ранга s .

Таким образом, при линейном преобразовании случайных величин их кумулянты и моменты преобразуются как тензоры.

2. Если случайные величины статистически независимы, то все их совместные кумулянты равны нулю. В этом случае все тензоры-кумулянты примут диагональный вид, в том числе и ковариационная матрица.

Из теории матриц известно (см., например, [45]), что всякую недиагональную матрицу $\mathbf{B}$ с помощью некоторой невырожденной матрицы $\mathbf{A}$ можно привести к диагональному виду $\mathbf{B}'$ преобразованием $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^+ = \mathbf{B}'$.

Поскольку это преобразование совпадает с (4.2.5) и поскольку случайные величины, для которых ковариационная матрица диагональна, являются по определению взаимно некоррелированными, постольку любой набор случайных величин ξ может быть с помощью некоторого линейного преобразования сведен к другому набору уже некоррелированных случайных величин η .

Так как обратное преобразование $\eta \rightarrow \xi$ также линейно, то случайные величины ξ_i всегда могут быть представлены в виде суперпозиции некоррелированных случайных величин η_j .

3. Чтобы от произвольной матрицы κ_{ξ}^{η} с помощью невырожденной матрицы $\mathbf{A}$ можно было перейти к диагональной матрице κ_{η}^{η} , не-

обходимо на матрицу $\mathbf{A}$ наложить $n(n-1)/2$ условий:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki} a_{lj} \langle \xi_i, \xi_j \rangle = 0 \quad (k \neq l).$$

Если же дополнительно потребовать, чтобы преобразование было ортогональным, т. е. чтобы $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ было единичной матрицей, то мы получим еще $n(n+1)/2$ условий:

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} a_{li} = \delta_{kl}.$$

Тем самым для n^2 коэффициентов будет n^2 условий.

Следовательно, из всех ортогональных преобразований существует только *единственное*, приводящее к некоррелированным η_j . Если же не требовать ортогональности преобразований, то $n(n+1)/2$ коэффициентов могут выбираться произвольно.

Возьмем, например, для двумерных случайных величин следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1, \\ \eta_2 &= a_{21} \xi_1 + \xi_2, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

матрица которого, как легко проверить, невырождена. Условие не коррелированности η_1 и η_2 приводит к

$$a_{21} = -\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle \xi_1, \xi_1 \rangle^{-1}.$$

Таким образом, представление

$$\xi_1 = \eta_1, \quad \xi_2 = \eta_2 + \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle \xi_1, \xi_1 \rangle^{-1} \eta_1$$

выражает произвольные случайные величины ξ_i через некоррелированные η_j .

Аффинное преобразование (4.2.7) легко распространяется и на N -мерные случайные величины. Матрица такого преобразования

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

всегда невырождена, а ее детерминант всегда положителен [45]. Поэтому коэффициенты этой матрицы могут быть найдены однозначно из условий некоррелированности η_j (если, конечно, ранг распределения ξ равен N). Расчет показывает, что

$$a_{kl} = - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \langle \xi_k, \xi_\lambda \rangle \frac{K_{l\lambda}}{|\kappa_{\frac{k}{2}}^{\xi}|}, \quad (4.2.9)$$

где $K_{l\lambda}$ — алгебраическое дополнение элемента $\langle \xi_l, \xi_\lambda \rangle$ матрицы $\kappa_{\frac{k}{2}}^{\xi}$, а $|\kappa_{\frac{k}{2}}^{\xi}|$ — определитель этой матрицы.

Таким образом, матрица (4.2.8) с коэффициентами (4.2.9) всегда приводит ковариационную матрицу κ_{ξ}^{ξ} к диагональной форме. Заметим, что построение некоррелированных η_j с помощью матрицы (4.2.8) совпадает с построением системы ортогональных векторов методом ортогонализации Грама—Шмидта [45].

4.3. Суммы случайных величин

1. Важным случаем линейного преобразования (4.2.1) является суперпозиция случайных величин

$$\eta = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1N}\xi_N.$$

Так как коэффициенты a_{1j} легко учесть введением новых случайных величин, положим их для простоты равными единице:

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N.$$

Найдем кумулянты суммы, полагая, что задан набор тензоров-кумулянтов κ_{ξ}^{ξ} .

2. Начнем решение поставленной задачи с простейшего случая двух слагаемых: $\eta = \xi_1 + \xi_2$. На основании (2.3.3) нетрудно получить следующее общее выражение k -го кумулянта суммы через кумулянты совокупности слагаемых:

$$\kappa_k^{\xi_1 + \xi_2} = \sum_{l=0}^k C_k^l \kappa_{k-l, l}^{\xi_1, \xi_2}. \quad (4.3.1)$$

Приняв во внимание, что

$$\kappa_{p, q}^{\xi_1, -\xi_2} = \langle \xi_1, \xi_1, \dots, \xi_1, -\xi_2, -\xi_2, \dots, -\xi_2 \rangle = (-1)^q \kappa_{p, q}^{\xi_1, \xi_2},$$

из (4.3.1) сразу же получаем формулу для k -го кумулянта разности

$$\kappa_k^{\xi_1 - \xi_2} = \sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l \kappa_{k-l, l}^{\xi_1, \xi_2}.$$

3. Обратимся теперь к сумме N случайных величин $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$.

Для отыскания связи кумулянтов случайной величины η с кумулянтами совокупности $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ воспользуемся свойствами кумулянтных скобок. В результате получим

$$\begin{aligned} \kappa_k^{\eta} &= \langle \eta, \eta, \dots, \eta \rangle = \langle \sum \xi_{j_1}, \sum \xi_{j_2}, \dots, \sum \xi_{j_k} \rangle = \\ &= \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \dots \sum_{j_k=1}^N \langle \xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_k} \rangle = \\ &= \sum_{l_1+l_2+\dots+l_N=k} \frac{k!}{l_1! l_2! \dots l_N!} \langle \xi_1^{[l_1]}, \xi_2^{[l_2]}, \dots, \xi_N^{[l_N]} \rangle = \\ &= \sum_{l_1+l_2+\dots+l_N=k} \frac{k!}{l_1! l_2! \dots l_N!} \kappa_{l_1, l_2, \dots, l_N}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Здесь суммирование идет по всем l_i , однако так, чтобы всегда $l_1 + l_2 + \dots + l_N = k$. Заметим, что коэффициент перед совместным кумулянтном k -го порядка в (4.3.2) есть полиномиальный коэффициент, стоящий перед произведением $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \cdot \dots \cdot a_N^{l_N}$ в разложении полинома $(a_1 + a_2 + \dots + a_N)^k$.

Если все ξ_i статистически независимы, то

$$\kappa_k^\eta = \sum_{i=1}^N \kappa_k^{\xi_i}. \quad (4.3.3)$$

Таким образом, среднее значение всегда является аддитивной величиной, а высшие кумулянты в общем случае не аддитивны и становятся таковыми только для статистически независимых величин. Вместе с тем для аддитивности второго кумулянта достаточно лишь некоррелированности случайных величин. Если между случайными величинами отсутствуют статистические связи первого и второго порядка, то аддитивным становится и кумулянт третьего порядка. Очевидно, что если у совокупности случайных величин отсутствуют все взаимные статистические связи, начиная с первого и кончая s -м порядком, то аддитивны все кумулянты, вплоть до κ_{s+1} .

Формула (4.3.2) справедлива, разумеется, и для моментов случайных величин. Однако поскольку совместные моменты статистически независимых величин не обращаются в нуль, формула (4.3.3) для моментов не верна (при $k > 1$). В отличие от кумулянтов высшие моменты не становятся аддитивными даже для статистически независимых величин. Это обстоятельство еще раз подчеркивает преимущество кумулянтного описания случайных переменных.

4.4. Центральная предельная теорема

1. В теории случайных величин большую роль играет так называемая центральная предельная теорема теории вероятностей, которая рассматривает вероятностное распределение суммы сколь угодно большого числа взаимонезависимых случайных величин. Имеется обширная литература, посвященная различным аспектам этой теоремы (см., например, [13, 34, 42]). Мы изложим здесь ее в «кумулянтном представлении» [46]. Другими словами, условия, при которых центральная предельная теорема является справедливой, мы наложим на кумулянты случайных величин, в то время как обычно этим условиям подчиняют центральные моменты.

Итак, рассмотрим случайную величину η , равную сумме N взаимонезависимых случайных величин, имеющих произвольные (в общем случае различные) вероятностные распределения

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_N.$$

Пусть вероятностное распределение каждой случайной величины однозначно представлено набором ее кумулянтов

$$\kappa_1^{\xi_k} = m_k, \quad \kappa_2^{\xi_k} = D_k = \sigma_k^2, \quad \kappa_3^{\xi_k} \equiv \kappa_{3k}, \dots, \quad \kappa_s^{\xi_k} \equiv \kappa_{sk}, \dots$$

Введем нормированную сумму $\xi \equiv (\eta - \langle \eta \rangle) D_{\eta}^{-1/2}$. На основании свойств кумулянтных скобок

$$\kappa_1^{\xi} = 0, \quad \kappa_2^{\xi} = 1, \quad \kappa_3^{\xi} = \kappa_3^{\eta} D_{\eta}^{-3/2}, \quad \kappa_4^{\xi} = \kappa_4^{\eta} D_{\eta}^{-2}, \dots$$

$$\dots, \quad \kappa_s^{\xi} = \kappa_s^{\eta} D_{\eta}^{-s/2}.$$

Приняв во внимание (4.3.3), получим следующее выражение для кумулянтов нормированной суммы случайных величин при любых распределениях ее слагаемых ($s = 3, 4, 5, \dots$):

$$\kappa_s^{\xi} = \sum_{k=1}^N \kappa_{sk} \left(\sum_{k=1}^N D_k \right)^{-s/2}. \quad (4.4.1)$$

2. Чтобы распределение нормированной суммы ξ при $N \rightarrow \infty$ стремилось к гауссовому, необходимо и достаточно, чтобы все высшие кумулянты этой суммы стремились к нулю, т. е. чтобы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \kappa_{sk} \left(\sum_{k=1}^N D_k \right)^{-s/2} = 0, \quad s = 3, 4, 5, \dots \quad (4.4.2)$$

Каков смысл условий (4.4.2)? Рассмотрим частный случай суммы одинаково распределенных случайных величин, для которых $\kappa_{sk} = \kappa_s$, $D_k = D$. Тогда из (4.4.1) следует, что

$$\kappa_s^{\xi} = \frac{N \kappa_s}{(ND)^{s/2}} = \frac{\kappa_s}{D^{s/2}} \frac{1}{N^{s/2-1}} = \frac{\gamma_s}{N^{s/2-1}}, \quad (4.4.3)$$

где γ_s — заданные конечные кумулянтные коэффициенты случайных величин. Следовательно, при $N \rightarrow \infty$ и $s > 2$ имеем $\kappa_s^{\xi} \rightarrow 0$. Таким образом мы получили так называемую теорему Линдберга—Леви (см., например, [13]): *распределение нормированной суммы одинаково распределенных величин стремится к нормальному при $N \rightarrow \infty$.*

Из (4.4.3) отчетливо видно, почему, собственно, $\kappa_s^{\xi} \rightarrow 0$. Потому, что $N \kappa_s$ возрастает при $N \rightarrow \infty$ медленнее, чем $(ND)^{s/2}$. Это значит, что условие (4.4.2) выполнено, если высшие кумулянты суммы растут при $N \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $(\sum_{k=1}^N D_k)^{s/2}$.

Это имеет место для одинаково распределенных случайных величин, а также и тогда, когда различные случайные величины ξ_k обладают примерно одинаковыми кумулянтами κ_{sk} (для каждого значения s), т. е. когда в сумме нет таких слагаемых, которые бы существенным образом определяли значения кумулянтов суммы.

С другой стороны, условия центральной предельной теоремы будут выполнены и тогда, когда такие «выдающиеся» слагаемые в сумме имеются, но их вклад в кумулянты растет при возрастании N медленнее, чем N .

Условия (4.4.2) будут выполнены и в том случае, когда все слагаемые, входящие в сумму, дают «равнозначный вклад» лишь в дисперсию суммы, так что при больших N

$$\sum_{k=1}^N D_k \sim N,$$

в то время как вклад в высшие кумулянты у разных слагаемых может быть различным, лишь бы их суммы $\sum_{k=1}^N \kappa_{sk}$ росли с ростом N не быстрее, чем N .

Таким образом, достаточным условием справедливости центральной предельной теоремы теории вероятностей является практически важное условие «равноправного участия» всех слагаемых, входящих в сумму $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$. Это условие объясняет большую физическую значимость этой теории при выяснении знаков распределения реально существующих случайных процессов.

3. Обратим теперь внимание на то, что при выполнении условий (4.4.2) к гауссову распределению стремится распределение случайной величины ζ , а не величины η , т. е. именно *нормированная* сумма при $N \rightarrow \infty$ стремится быть гауссовой случайной величиной, а не просто сумма N случайных величин.

Это связано с тем, что при $N \rightarrow \infty$ мы оставили фиксированными значения кумулянтов слагаемых, вследствие чего все кумулянты суммы η могут возрасти (по модулю).

Наиболее сильно эта особенность проявляется при рассмотрении суммы случайных величин, обладающих устойчивыми распределениями. Пусть, например, все случайные величины ξ_k обладают распределениями Пуассона с одинаковым параметром Θ . Тогда сумма $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$ будет обладать кумулянтами

$$\kappa_1^\eta = N\Theta, \quad \kappa_2^\eta = N\Theta, \quad \dots, \quad \kappa_s^\eta = N\Theta,$$

т. е. иметь по-прежнему пуассоновское распределение (с параметром $N\Theta$). Вместе с тем, высшие кумулянты нормированной суммы

$$\kappa_s^\zeta = \frac{N\Theta}{(N\Theta)^{s/2}} = \frac{1}{(N\Theta)^{s/2-1}}, \quad s > 2$$

будут стремиться к нулю при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, при сколь угодно большом N обычная сумма η будет иметь пуассоновское распределение, в то время как распределение нормированной суммы будет близко к гауссову.

4.5. Нелинейные преобразования

1. Когда речь заходит о *нелинейных* преобразованиях случайных величин, ситуация существенно усложняется. Появляются особенности, которых не было раньше, и это сильно затрудняет отыскание статистических характеристик «выходных» переменных.

Основная особенность нелинейного преобразования — это то, что любой кумулянт или момент выхода в общем случае зависит от всех кумулянтов «входного» распределения. Возьмем, например, экспоненциальное преобразование $\xi \rightarrow \eta = e^\xi$, рассмотренное в примере 3.2.2. Согласно (3.2.7) даже первый кумулянт, выходной переменной определяется значениями всех кумулянтов ξ .

С другой стороны, возрастают трудности вычисления выходных кумулянтов. Полученные в третьей главе кумулянтные уравнения позволяют сравнительно легко устанавливать связи входных кумулянтов лишь с моментами выходов. Так, если случайная переменная подвергается нелинейному преобразованию $\xi \rightarrow \eta = \eta(\xi)$, то для моментов α_s^η формулы (3.2.2)–(3.2.6) дают уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_s^\eta}{\partial \kappa_p^\xi} &= \frac{1}{p!} \left\langle \frac{d^p}{d\xi^p} \eta^s(\xi) \right\rangle, \\ \frac{\partial^2 \alpha_s^\eta}{\partial \kappa_p^\xi \partial \kappa_q^\xi} &= \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{d^{p+q}}{d\xi^{p+q}} \eta^s(\xi) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Для кумулянтов же выхода аналогичных уравнений у нас нет. Если пытаться их получить, то в общем случае мы придем к довольно громоздким и неудобным выражениям. Поэтому в этом параграфе мы ограничимся выводом и использованием подобных уравнений только для кумулянтов первых четырех порядков.

Вместе с тем, в § 4.7 мы получим более общие уравнения, связывающие кумулянтные скобки с кумулянтами входных случайных переменных, и с их помощью найдем формулы размыкания ряда кумулянтных скобок.

2. Прежде чем искать связь кумулянтов выхода с кумулянтами входа, заметим, что в состав кумулянтов, например, в

$$\kappa_2^\eta = \langle \eta, \eta \rangle = \langle \eta^2(\xi) \rangle - \langle \eta(\xi) \rangle^2,$$

входит не только среднее значение, но и некоторая функция (в данном случае квадрат) от уже усредненной величины. Это значит, что мы должны искать производные по кумулянтам κ_s^ξ от среднего значения функций вида $H(\xi, \langle h(\xi) \rangle)$, где $\langle h(\xi) \rangle$ уже зависит в общем случае от всех κ_s^ξ . По этой причине формулы (3.2.2)–(3.2.6) не могут быть непосредственно использованы и требуют специального обобщения, которое мы сейчас и проведем.

Производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle H(\xi, \langle h(\xi) \rangle) \rangle}{\partial \kappa_s} &= \int \frac{\partial H(x, \langle h(\xi) \rangle)}{\partial \kappa_s} W_\xi(x) dx + \\ &+ \int H(x, \langle h(\xi) \rangle) \frac{\partial W_\xi(x)}{\partial \kappa_s} dx \end{aligned}$$

можно записать в виде

$$\frac{\partial \langle H(\xi, \langle h(\xi) \rangle) \rangle}{\partial \kappa_s} = \left\langle \frac{\partial H(\xi, \langle h(\xi) \rangle)}{\partial \kappa_s} \right\rangle + \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} H(\xi, \langle h(\xi) \rangle) \right\rangle. \quad (4.5.2)$$

В функцию H кумулянты в явном виде не входят, поэтому

$$\left\langle \frac{\partial H(\xi, \langle h(\xi) \rangle)}{\partial \kappa_s} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial H(\xi, \langle h \rangle)}{\partial \langle h \rangle} \right\rangle \frac{\partial \langle h(\xi) \rangle}{\partial \kappa_s}.$$

Итак,

$$\frac{\partial \langle H(\xi, \langle h(\xi) \rangle) \rangle}{\partial \kappa_s} = \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} \left[H(\xi, \langle h \rangle) + \left\langle \frac{\partial H(\xi, \langle h \rangle)}{\partial \langle h \rangle} \right\rangle h(\xi) \right] \right\rangle. \quad (4.5.3)$$

Если в H входит несколько усредненных функций $h_1(\xi)$, $h_2(\xi)$, ..., то вместо (4.5.3) придем к

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle H(\xi, \langle h_1(\xi) \rangle, \langle h_2(\xi) \rangle, \dots) \rangle}{\partial \kappa_s} &= \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} \left[H(\xi, \langle h_1 \rangle, \langle h_2 \rangle, \dots) + \right. \right. \\ &+ \left. \sum_i \left\langle \frac{\partial H(\xi, \langle h_1 \rangle, \langle h_2 \rangle, \dots)}{\partial \langle h_i \rangle} \right\rangle h_i(\xi) \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Используя полученные формулы двукратно, найдем, например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \langle H(\xi, \langle h(\xi) \rangle) \rangle}{\partial \kappa_s \partial \kappa_r} &= \frac{1}{r! s!} \left\{ \left\langle \frac{d^{r+s}}{d\xi^{r+s}} H \right\rangle + \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} \frac{\partial H}{\partial \langle h \rangle} \right\rangle \times \right. \\ &\times \left\langle \frac{d^r}{d\xi^r} h \right\rangle + \left\langle \frac{d^r}{d\xi^r} \frac{\partial H}{\partial \langle h \rangle} \right\rangle \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} h \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 H}{\partial \langle h \rangle^2} \right\rangle \left\langle \frac{d^r}{d\xi^r} h \right\rangle \times \\ &\times \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} h \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial \langle h \rangle} \right\rangle \left\langle \frac{d^{r+s}}{d\xi^{r+s}} h \right\rangle \left. \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что многократное использование формул (4.5.2), (4.5.3) ведет уже к довольно громоздким выражениям, и мы их приводить не будем, несмотря на то, что в принципе их получить не сложно.

Несколько более простые выражения получаются, если в усредняемую функцию, кроме ξ , входят не усредненные значения других функций, а кумулянты. В этом случае вместо (4.5.2) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{H}(\xi, \kappa_1, \dots, \kappa_p, \dots) \rangle}{\partial \kappa_s} &= \left\langle \frac{\partial \bar{H}(\xi, \kappa_1, \dots, \kappa_p, \dots)}{\partial \kappa_s} \right\rangle + \\ &+ \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} \bar{H}(\xi, \kappa_1, \dots) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Повторное использование этой формулы приводит к

$$\frac{\partial^2 \langle \bar{H}(\xi, \kappa_1, \dots, \kappa_p, \dots) \rangle}{\partial \kappa_s \partial \kappa_r} = \left\langle \frac{\partial^2 \bar{H}(\xi, \kappa_1, \dots, \kappa_p, \dots)}{\partial \kappa_s \partial \kappa_r} \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{r!} \left\langle \frac{d^r}{d\xi^r} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \kappa_s} \right\rangle + \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \kappa_r} \right\rangle + \frac{1}{s! r!} \left\langle \frac{d^{r+s}}{d\xi^{r+s}} \bar{H} \right\rangle.$$

3. Вернемся теперь к отысканию зависимостей кумулянтов случайной величины $\eta = \eta(\xi)$ от кумулянтов входной переменной ξ . Так как кумулянты представляют собой комбинацию моментов, то на основании (1.2.4) легко записать их дифференциалы через дифференциалы моментов. Например, для первых четырех кумулянтов имеем

$$\begin{aligned} d\kappa_1 &= d\alpha_1, \\ d\kappa_2 &= d\alpha_2 - 2\alpha_1 d\alpha_1, \\ d\kappa_3 &= d\alpha_3 - 3\alpha_1 d\alpha_2 + (6\alpha_1^2 - 3\alpha_2) d\alpha_1, \\ d\kappa_4 &= d\alpha_4 - 4\alpha_1 d\alpha_3 + (12\alpha_1^2 - 6\alpha_2) d\alpha_2 + (24\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_3 - \\ &\quad - 24\alpha_1^3) d\alpha_1. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (4.5.3), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_1^\eta}{\partial \kappa_\xi^s} &= \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} \eta \right\rangle, \\ \frac{\partial \kappa_2^\eta}{\partial \kappa_\xi^s} &= \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} [\eta^2 - 2\langle \eta \rangle \eta] \right\rangle, \\ \frac{\partial \kappa_3^\eta}{\partial \kappa_\xi^s} &= \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} [\eta^3 - 3\langle \eta \rangle \eta^2 + (6\langle \eta \rangle^2 - 3\langle \eta^2 \rangle) \eta] \right\rangle, \\ \frac{\partial \kappa_4^\eta}{\partial \kappa_\xi^s} &= \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{d\xi^s} [\eta^4 - 4\langle \eta \rangle \eta^3 + (12\langle \eta \rangle^2 - 6\langle \eta^2 \rangle) \eta^2 + \right. \\ &\quad \left. + (24\langle \eta \rangle \langle \eta^2 \rangle - 4\langle \eta^3 \rangle - 24\langle \eta \rangle^3) \eta] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Выделим из этих уравнений особо четыре формулы, связывающие средние значения и дисперсии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_\eta}{\partial m_\xi} &= \left\langle \frac{d\eta}{d\xi} \right\rangle, \quad \frac{\partial m_\eta}{\partial D_\xi} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right\rangle, \\ \frac{\partial D_\eta}{\partial m_\xi} &= 2 \left\langle \eta, \frac{d\eta}{d\xi} \right\rangle, \\ \frac{\partial D_\eta}{\partial D_\xi} &= \left\langle \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d\eta}{d\xi} \right\rangle + \left\langle \eta, \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right\rangle + \left\langle \frac{d\eta}{d\xi} \right\rangle^2. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Пример 4.5.1. Применим полученные формулы для нахождения первых четырех кумулянтов случайной величины, подвергшейся квадратичному преобразованию $\xi \rightarrow \eta = \xi^2$. Первый кумулянт находится элементарно (для простоты записи κ_ξ^ξ обозначим в этом примере как κ_s): $\kappa_1^\eta = \kappa_2 + \kappa_1^2$. Струк-

тура последующих кумулянтов может быть записана сразу, исходя из их порядка, например,

$$\kappa_2^\eta = A_{21} \kappa_4 + A_{22} \kappa_1 \kappa_3 + A_{23} \kappa_2^2 + A_{24} \kappa_1^2 \kappa_2 + A_{25} \kappa_1^4.$$

Коэффициенты A_{ij} нетрудно найти с помощью формул (4.5.5):

$$\frac{\partial \kappa_2^\eta}{\partial \kappa_4} = A_{21} = \frac{1}{4!} \left\langle \frac{d^4}{d\xi^4} [\xi^4 - 2 \langle \xi^2 \rangle \xi^2] \right\rangle = 1,$$

$$\frac{\partial \kappa_2^\eta}{\partial \kappa_3} = A_{22} \kappa_1 = \frac{1}{3!} \left\langle \frac{d^3}{d\xi^3} [\xi^4 - 2 \langle \xi^2 \rangle \xi^2] \right\rangle = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \langle \xi \rangle = 4\kappa_1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_2^\eta}{\partial \kappa_2} &= 2A_{23} \kappa_2 + A_{24} \kappa_1^2 = \frac{1}{2!} \left\langle \frac{d^2}{d\xi^2} [\xi^4 - 2 \langle \xi^2 \rangle \xi^2] \right\rangle = \\ &= \frac{4 \cdot 3 \langle \xi^2 \rangle - 4 \langle \xi^2 \rangle}{2} = 4 \langle \xi^2 \rangle = 4\kappa_2 + 4\kappa_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_2^\eta}{\partial \kappa_1} &= A_{22} \kappa_3 + 2A_{24} \kappa_1 \kappa_2 + 4A_{25} \kappa_1^3 = \left\langle \frac{d}{d\xi} [\xi^4 - 2 \langle \xi^2 \rangle \xi^2] \right\rangle = \\ &= 4 \langle \xi^3 \rangle - 4 \langle \xi \rangle \langle \xi^2 \rangle = 4\kappa_3 + 8\kappa_1 \kappa_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\kappa_2^\eta = \langle \xi^2, \xi^2 \rangle = \kappa_4 + 4\kappa_1 \kappa_3 + 2\kappa_2^2 + 4\kappa_1^2 \kappa_2. \quad (4.5.7)$$

Аналогичный расчет приводит к

$$\begin{aligned} \kappa_3^\eta = \langle \xi^2, \xi^2, \xi^2 \rangle &= \kappa_6 + 6\kappa_1 \kappa_5 + 12\kappa_2 \kappa_4 + 10\kappa_3^2 + 8\kappa_2^2 + \\ &+ 24\kappa_1^2 \kappa_2^2 + 12\kappa_1^2 \kappa_4 + 8\kappa_1^3 \kappa_3 + 48\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3, \\ \kappa_4^\eta = \langle \xi^2, \xi^2, \xi^2, \xi^2 \rangle &= \kappa_8 + 8\kappa_1 \kappa_7 + 24\kappa_2 \kappa_6 + 24\kappa_1^2 \kappa_6 + \\ &+ 56\kappa_3 \kappa_5 + 144\kappa_1 \kappa_2 \kappa_5 + 32\kappa_1^2 \kappa_5 + 32\kappa_4^2 + 256\kappa_1 \kappa_3 \kappa_4 + \\ &+ 288\kappa_1^2 \kappa_2 \kappa_4 + 144\kappa_2^2 \kappa_4 + 16\kappa_1^4 \kappa_4 + 240\kappa_2 \kappa_3^2 + 192\kappa_1^2 \kappa_3^2 + \\ &+ 174\kappa_1^3 \kappa_2 \kappa_3 + 576\kappa_1 \kappa_2^2 \kappa_3 + 48\kappa_4^2 + 192\kappa_1^2 \kappa_2^2. \end{aligned}$$

Полученные формулы означают, в частности, следующее. Если нас интересует, например, дисперсия квадратично-преобразованной произвольной случайной величины, то, согласно (4.5.7), искомая дисперсия будет определяться только первыми четырьмя кумулянтами входного распределения. По этой причине *различные* входные вероятностные распределения (различные по высшим кумулянтам: $\kappa_5, \kappa_6, \kappa_7, \dots$) будут приводить к *одному и тому же* результату.

4. Нетрудно распространить полученные формулы дифференцирования по кумулянтам на функцию, зависящую от двух случайных величин: $H = H(\xi, \eta, \langle h_1(\xi, \eta) \rangle, \langle h_2(\xi, \eta) \rangle)$. Так, вместо (4.5.3) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle H(\xi, \eta, \langle h_1 \rangle, \langle h_2 \rangle) \rangle}{\partial \kappa_{p,q}^{\xi, \eta}} &= \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{d^{p+q}}{d\xi^p d\eta^q} \left[H(\xi, \eta, \langle h_1 \rangle, \langle h_2 \rangle) + \right. \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial H}{\partial \langle h_i \rangle} \right\rangle h_i(\xi, \eta) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Вместо (4.5.4) будем иметь уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{H}(\xi, \eta, \kappa_1^\xi, \kappa_1^\eta, \dots, \kappa_{r,s}^{\xi, \eta}, \dots) \rangle}{\partial \kappa_{p,q}^{\xi, \eta}} = \\ = \left\langle \frac{\partial \bar{H}(\xi, \eta, \kappa_1^\eta, \kappa_1^\eta, \dots, \kappa_{r,s}^{\xi, \eta}, \dots)}{\partial \kappa_{p,q}^{\xi, \eta}} \right\rangle + \\ + \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{\partial^{p+q}}{\partial \xi^p \partial \eta^q} \bar{H}(\xi, \eta, \kappa_1^\xi, \kappa_1^\eta, \dots, \kappa_{r,s}^{\xi, \eta}, \dots) \right\rangle. \end{aligned}$$

Также легко получить производные по кумулянтам и для функций, зависящих от большого числа случайных переменных. Так, например $[h_i = h_i(\xi, \eta, \zeta)]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle H(\xi, \eta, \zeta, \langle h_1 \rangle, \dots, \langle h_k \rangle) \rangle}{\partial \kappa_{p,q,r}^{\xi, \eta, \zeta}} = \frac{1}{p! q! r!} \left\langle \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^r} \times \right. \\ \left. \times \left[H + \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{\partial H}{\partial \langle h_i \rangle} \right\rangle h_i(\xi, \eta, \zeta) \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

4.6. Нелинейные преобразования гауссовых переменных

1. Когда нелинейному преобразованию подвергаются гауссовы случайные величины, мы встречаемся с наиболее простой и в то же время практически важной ситуацией. В этом случае метод кумулянтных уравнений становится наиболее эффективным.

Начнем анализ с нелинейного преобразования одной гауссовой случайной величины

$$\eta = f(\xi), \quad (4.6.1)$$

среднее значение которой $m_\xi \equiv m$ и дисперсия $D_\xi \equiv D$ заданы. Любые статистические характеристики негауссовой случайной величины η зависят лишь от двух входных кумулянтов, например,

$$\alpha_s^\eta = \alpha_s^\eta(m, D), \quad \kappa_s^\eta = \kappa_s^\eta(m, D).$$

Это же, конечно, относится и к среднему значению $\langle \Psi(\xi) \rangle$ какой-либо функции от ξ . При этом зависимость $\langle \Psi(\xi) \rangle$ от m и D определяется, согласно (3.2.3), уравнениями

$$\frac{\partial^n \langle \Psi(\xi) \rangle}{\partial m^n} = \langle \Psi^{(n)}(\xi) \rangle, \quad \frac{\partial^n \langle \Psi(\xi) \rangle}{\partial D^n} = \frac{1}{2^n} \langle \Psi^{(2n)}(\xi) \rangle. \quad (4.6.2)$$

Это обстоятельство приводит к тому, что мы всегда можем записать искомые характеристики в виде степенного ряда по D , коэффициенты которого будут зависеть от m . Например,

$$\langle \Psi(\xi) \rangle = A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + \dots + A_s D^s + \dots \quad (4.6.3)$$

Поскольку при $D = 0$ случайная величина ξ равна среднему значению, то для второго уравнения (4.6.2) начальное условие примет вид

$$\left. \frac{\partial^n \langle \Psi \rangle}{\partial D^n} \right|_{D=0} = \frac{1}{2^n} \Psi^{(2n)}(m). \quad (4.6.4)$$

С другой стороны, дифференцируя (4.6.3) и вычисляя значение производной, имеем

$$\left. \frac{\partial^n \langle \Psi \rangle}{\partial D^n} \right|_{D=0} = n! A_n.$$

Сравнивая это значение с (4.6.4), находим коэффициенты A_n . Следовательно, ряд (4.6.3) принимает вид [ср. с (I.6) в приложении I]:

$$\langle \Psi(\xi) \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \Psi^{(2s)}(m) \left(\frac{D}{2} \right)^s. \quad (4.6.5)$$

Таким образом, имеются две возможности непосредственного выражения $\langle \Psi(\xi) \rangle$ через кумулянты гауссовой случайной величины. Первая — это представление искомого среднего в виде ряда (4.6.5), вторая — решение дифференциального уравнения (4.6.2) с начальным условием (4.6.4).

Это относится, разумеется, и к моментам случайной величины (4.6.1). Для этих моментов может быть записан ряд

$$\alpha_n^\eta = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left[\frac{d^{2s}}{d\xi^{2s}} f^n(\xi) \right]_{\xi=m} \left(\frac{D}{2} \right)^s, \quad (4.6.6)$$

а также дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^s \alpha_n^\eta}{\partial D^s} = \frac{1}{2^s} \left\langle \frac{d^{2s}}{d\xi^{2s}} f^n(\xi) \right\rangle$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^s \alpha_n^\eta}{\partial D^s} \right|_{D=0} = \frac{1}{2^s} \frac{d^{2s}}{dm^{2s}} f^n(m). \quad (4.6.7)$$

2. Проиллюстрируем эти возможности двумя примерами.

Пример 4.6.1. Найдём $\langle \sin a\xi \rangle$. Так как

$\Psi(\xi) = \sin a\xi$, $\Psi''(\xi) = -a^2 \sin a\xi$, ..., $\Psi^{(2s)}(\xi) = (-1)^s a^{2s} \sin a\xi$,
то согласно (4.6.5)

$$\begin{aligned} \langle \sin a\xi \rangle &= \left\{ 1 - a^2 \frac{D}{2} + \frac{a^4}{2!} \left(\frac{D}{2} \right)^2 - \frac{a^6}{3!} \left(\frac{D}{2} \right)^3 + \dots \right\} \sin am = \\ &= \exp [-(a^2 D/2)] \sin am. \end{aligned}$$

Пример 4.6.2. Пусть $\eta = f(\xi) = \begin{cases} k\xi, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$

где ξ имеет симметричное гауссово распределение. Требуется найти m_η и D_η .

Для m_η согласно (4.6.2) и принимая во внимание (I.4), имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial m_\eta}{\partial D} = \frac{1}{2} \langle f''(\xi) \rangle = \frac{k}{2} \langle \delta(\xi) \rangle = \frac{k}{2\sqrt{2\pi D}}.$$

Его решение при начальном условии $(m_\eta)_{D=0} = 0$ имеет вид

$$m_\eta = \langle f(\xi) \rangle = k\sqrt{D/2\pi}. \quad (4.6.8)$$

Дисперсии согласно (4.5.6) связаны уравнением

$$\partial D_\eta / \partial D = \langle [f'(\xi)]^2 \rangle + \langle f(\xi), f''(\xi) \rangle.$$

Учитывая, что $f'(\xi) = k \cdot 1(\xi)$, $f''(\xi) = k \cdot \delta(\xi)$, $f(\xi) \delta(\xi) = 0$, получаем $\langle [f']^2 \rangle = k^2/2$, $\langle f, f'' \rangle = -k^2/2\pi$.

Уравнение

$$\frac{\partial D_\eta}{\partial D} = \frac{k^2}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} \right]$$

при начальном условии $(D_\eta)_{D=0} = 0$ имеет решение

$$D_\eta = \langle \eta, \eta \rangle = \frac{k^2}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} \right] D. \quad (4.6.9)$$

Отсюда, кстати, получаем и значение среднего квадрата

$$\langle \eta^2 \rangle = 0,5k^2D. \quad (4.6.10)$$

3. Перейдем теперь к рассмотрению нелинейного преобразования двумерных гауссовых случайных величин. Пусть гауссова совокупность $\{x, y\}$ представлена известными значениями $m_x, m_y, D_x, D_y, B_{xy}$.

Среднее значение какой-либо функции $\Psi(x, y)$ зависит теперь от пяти указанных кумулянтов, и поэтому его мы можем разложить в ряды по этим кумулянтам. Наибольший практический интерес представляет разложение по степеням ковариации B_{xy} :

$$\langle \Psi(x, y) \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_s}{s!} B_{xy}^s. \quad (4.6.11)$$

Тот факт, что при $B_{xy} = 0$ случайные величины x и y становятся статистически независимыми, существенно упрощает вычисление коэффициентов A_s , которые равны

$$A_s = \left\langle \frac{\partial^{2s}}{\partial x^s \partial y^s} \Psi(x, y) \right\rangle_{x, y - \text{стат. независ.}} \quad (4.6.12)$$

Заметим, что ряд (4.6.11), разумеется, может быть записан и при произвольном распределении совокупности $\{x, y\}$. Однако коэффициенты A_s будут уже зависеть от всех кумулянтов распределения (кроме B_{xy}), и формула (4.6.12) станет несправедливой.

Особенный интерес представляет частный случай $\Psi(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, соответствующий преобразованию, изображенному на рис. 4.1, когда $u = f_1(x)$, $v = f_2(y)$. В этом случае

$$\langle \Psi(x, y) \rangle = \langle u \cdot v \rangle \equiv K_{uv}, A_s = \langle f_1^{(s)}(x) \rangle \langle f_2^{(s)}(y) \rangle.$$

Ряд (4.6.11) становится рядом для корреляции выходных переменных:

$$K_{uv} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f_1^{(s)} \rangle \langle f_2^{(s)} \rangle B_{xy}^s. \quad (4.6.13)$$

Вычитая из обеих частей слагаемое $\langle u \rangle \langle v \rangle = \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle$, получим ряд, дающий разложение ковариации выходных переменных по степеням ковариации входных переменных:

$$B_{uv} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f_1^{(s)} \rangle \langle f_2^{(s)} \rangle B_{xy}^s. \quad (4.6.14)$$

Если $f_1 = f_2 = f$, а случайные величины x, y имеют одинаковые распределения ($m_x = m_y, D_x = D_y$), то последний ряд принимает более простую форму:

$$B_{uv} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle^2 B_{xy}^s. \quad (4.6.15)$$

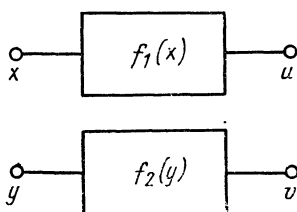


Рис. 4.1.

С этим рядом мы еще встретимся в дальнейшем, когда будем интересоваться корреляционной функцией случайного процесса при его нелинейном преобразовании.

Если сумму ряда (4.6.13) найти не удастся, то можно прибегнуть к решению получающегося из (3.3.3) дифференциального уравнения [47—49]:

$$\frac{\partial^n K_{uv}}{\partial B_{xy}^n} = \langle f_1^{(n)}(x) \cdot f_2^{(n)}(y) \rangle \quad (4.6.16)$$

при начальных условиях

$$\left. \frac{\partial^n K_{uv}}{\partial B_{xy}^n} \right|_{B_{xy}=0} = \langle f_1^{(n)}(x) \rangle \langle f_2^{(n)}(y) \rangle.$$

4. Рассмотрим два примера.

Пример 4.6.3. Пусть задано следующее нелинейное преобразование совокупно гауссовых случайных величин x, y , при $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$:

$$u = f_1(x) = \begin{cases} ax, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad v = f_2(y) = by^2.$$

Требуется найти ковариацию B_{uv} . Запишем производные f_1' и f_2' :

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= a \cdot 1(x), \quad f_1''(x) = a \cdot \delta(x), \quad f_1'''(x) = a \cdot \delta'(x), \dots \\ f_2'(y) &= 2by, \quad f_2''(y) = 2b, \quad f_2'''(y) = 0, \dots \end{aligned}$$

Так как все производные $f_2(y)$, начиная с третьей, равны нулю, то на основании (4.6.16) ковариация B_{xy} входит в K_{uv} не выше, чем во второй степени. Выбирая $n = 2$, имеем

$$\frac{\partial^2 K_{uv}}{\partial B_{xy}^2} = \langle a \delta(x) 2b \rangle = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi D_x}}.$$

Первый интеграл равен

$$\frac{\partial K_{uv}}{\partial B_{xy}} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi D_x}} B_{xy} + C_1.$$

Из начального условия

$$\left. \frac{\partial K_{uv}}{\partial B_{xy}} \right|_{B_{xy}=0} = \langle a \cdot 1(x) \rangle \langle 2by \rangle = 0$$

следует, что $C_1 = 0$. Второй интеграл равен

$$K_{uv} = \frac{ab}{\sqrt{2\pi D_x}} B_{xy}^2 + C_2.$$

Используя формулу (4.6.8), из второго начального условия находим C_2 :

$$K_{uv}|_{B_{xy}=0} = \langle f_1(x) \rangle \langle by^2 \rangle = ab \sqrt{\frac{D_x}{2\pi}} D_y = C_2.$$

Таким образом, корреляция и ковариация выходных переменных соответственно равны

$$K_{uv} = \frac{ab^2}{\sqrt{2\pi D_x}} B_{xy}^2 + ab \sqrt{\frac{D_x}{2\pi}} D_y, \quad B_{uv} = \frac{ab}{\sqrt{2\pi D_x}} B_{xy}^2. \quad (4.6.17)$$

Приведенный пример наглядно иллюстрирует практическую ценность кумулянтного подхода при исследовании нелинейного преобразования случайных величин. Разумеется, формулы (4.6.17) можно получить и «классическим» путем — нахождением W_{uv} через W_{xy} и дальнейшим интегрированием. Однако если попытаться это проделать, то мы встретимся с весьма громоздкими выкладками, несмотря на то, что W_{xy} есть гауссово распределение.

Пример 4.6.4. Пусть совокупно гауссовы величины x и y ($\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$) преобразуются в u и v , проходя через ограничители:

$$u = f_1(x) = a \cdot 1(x), \quad v = f_2(y) = b \cdot 1(y).$$

Требуется найти корреляцию и ковариацию выходов ограничителей.

В нашем случае средние значения всех нечетных производных функций f_1 и f_2 отличны от нуля. Поэтому (4.6.14) будет бесконечным рядом. Учитывая (1.4), найдем

$$\begin{aligned}
\langle f_1 \rangle &= a/2, & \langle f_2 \rangle &= b/2, \\
\langle f'_1 \rangle &= a \langle \delta(x) \rangle = \frac{a}{\sqrt{2\pi D_x}}, & \langle f'_2 \rangle &= b \langle \delta(y) \rangle = \frac{b}{\sqrt{2\pi D_y}}, \\
\langle f''_1 \rangle &= a \langle \delta'(x) \rangle = 0, & \langle f''_2 \rangle &= b \langle \delta'(y) \rangle = 0, \\
\langle f'''_1 \rangle &= a \langle \delta''(x) \rangle = \frac{-a}{D_x \sqrt{2\pi D_x}}, & \langle f'''_2 \rangle &= b \langle \delta''(y) \rangle = \frac{-b}{D_y \sqrt{2\pi D_y}}, \\
\langle f^{(4)}_1 \rangle &= a \langle \delta'''(x) \rangle = 0, & \langle f^{(4)}_2 \rangle &= b \langle \delta'''(y) \rangle = 0, \\
\langle f^{(5)}_1 \rangle &= a \langle \delta^{(4)}(x) \rangle = \frac{3a}{D_x^2 \sqrt{2\pi D_x}}, & \langle f^{(5)}_2 \rangle &= b \langle \delta^{(4)}(y) \rangle = \frac{3b}{D_y^2 \sqrt{2\pi D_y}}, \\
&\dots & & \dots
\end{aligned}$$

Подставляя значения средних в (4.6.14), получим следующий ряд для искомой ковариации:

$$\begin{aligned}
B_{uv} &= \frac{ab B_{xy}}{2\pi \sqrt{D_x D_y}} + \frac{1}{3!} \frac{ab B_{xy}^3}{2\pi D_x D_y \sqrt{D_x D_y}} + \\
&+ \frac{9}{5!} \frac{ab B_{xy}^5}{2\pi D_x^2 D_y^2 \sqrt{D_x D_y}} + \dots
\end{aligned} \quad (4.6.18)$$

Чтобы определить сумму этого ряда, запишем уравнение для K_{uv} , полагая в (4.6.16) $n = 1$ и учитывая (1.5):

$$\frac{\partial K_{uv}}{\partial B_{xy}} = ab \langle \delta(x) \delta(y) \rangle = \frac{ab}{2\pi \sqrt{D_x D_y - B_{xy}^2}}.$$

Решая это уравнение, получаем

$$K_{uv} = \frac{ab}{2\pi} \arcsin \frac{B_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} + C.$$

Из начального условия $K_{uv} = \langle u \rangle \langle v \rangle = ab/4$ при $B_{xy} = 0$ имеем окончательно

$$K_{uv} = \frac{ab}{2\pi} \left[\arcsin \frac{B_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} + \frac{\pi}{2} \right].$$

Ковариация

$$B_{uv} = \frac{ab}{2\pi} \arcsin \frac{B_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}, \quad (4.6.19)$$

как и должно быть, совпадает с (4.6.18).

Интересно отметить, что, вычислив корреляцию K_{uv} , мы нашли и все высшие моменты выходных переменных, ибо

$$\begin{aligned}
\alpha_{p,q}^{u,v} &= \langle u^p v^q \rangle = \langle a^p \cdot 1^p(x) b^q \cdot 1^q(y) \rangle = a^p b^q \langle 1(x) 1(y) \rangle = \\
&= a^{p-1} b^{q-1} K_{uv}.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\alpha_{p,q}^{u,v} = \frac{a^p b^q}{2\pi} \left[\arcsin \frac{B_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} + \frac{\pi}{2} \right] (p \neq 0, q \neq 0),$$

$$\alpha_p^u = a^p/2, \quad \alpha_q^v = b^q/2. \quad (4.6.20)$$

Используя (4.6.19) и (4.6.20), можно найти выражения и для любых кумулянтов негауссовой совокупности выходных случайных величин u, v , например:

$$\kappa_{2s+1}^u = \kappa_{2s+1}^v = 0, \quad s > 0,$$

$$\kappa_1^u = \frac{a}{2}, \quad \kappa_2^u = \frac{a^2}{4}, \quad \kappa_4^u = -\frac{a^4}{8}, \quad \kappa_6^u = \frac{a^6}{4}, \dots,$$

$$\kappa_1^v = \frac{b}{2}, \quad \kappa_2^v = \frac{b^2}{4}, \quad \kappa_4^v = -\frac{b^4}{8}, \quad \kappa_6^v = \frac{b^6}{4}, \dots,$$

$$\kappa_{1,1}^{u,v} = \frac{ab}{2\pi} \arcsin \frac{B_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}, \quad \kappa_{2,1}^{u,v} = \kappa_{1,2}^{u,v} = 0,$$

$$\kappa_{3,1}^{u,v} = -\frac{a^3 b}{4\pi} \arcsin \frac{B_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}},$$

$$\kappa_{2,2}^{u,v} = -\frac{a^2 b^2}{2\pi^2} \left[\arcsin \frac{B_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} \right]^2,$$

$$\kappa_{1,3}^{u,v} = -\frac{ab^3}{4\pi} \arcsin \frac{B_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}.$$

4.7. Размыкание кумулянтных скобок

1. В § 4.5 мы уже говорили о трудностях вычисления кумулянтов случайной переменной, подвергшейся нелинейному преобразованию, и получили некоторые результаты для ряда простых случаев. Чтобы решить эту задачу в более общем виде, необходимо, во-первых, получить для кумулянтных скобок вида

$$\langle f(x, y), \Psi(x, y, z) \rangle, \langle x, f(x, y), \Psi(x, y, z) \rangle, \dots \quad (4.7.1)$$

уравнения, аналогичные тем, которые мы имеем для моментных скобок, и, во-вторых, с их помощью установить формулы размыкания кумулянтных скобок, т. е. найти их разложение по совместным кумулянтам совокупности $\{x, y, z, \dots\}$. Для этой цели эффективнее всего привлечь аппарат неполных (круглых) кумулянтных скобок, представив угловую кумулянтную скобку в виде статистического среднего от круглой скобки, а затем воспользоваться результатами § 4.5.

2. Начнем с уравнения для кумулянтной скобки второго порядка

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \langle (f(x), g(x)) \rangle.$$

Согласно (2.8.2) в неполную кумулянтную скобку $(f, g) = fg - \langle f \rangle g$ уже входит статистическое среднее. Поэтому для нахождения про-

изводной $\langle f, g \rangle$ по кумулянтам мы должны обратиться к формуле (4.5.2). Это приведет нас к

$$\frac{\partial \langle f, g \rangle}{\partial \kappa_s} = \frac{\partial \langle f, g \rangle}{\partial \kappa_s} = \left\langle \frac{\partial (f, g)}{\partial \kappa_s} \right\rangle + \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dx^s} (f, g) \right\rangle.$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \langle f(x), g(x) \rangle}{\partial \kappa_s} = \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dx^s} [f(x) g(x) - \langle f(x) \rangle g(x) - f(x) \langle g(x) \rangle] \right\rangle. \quad (4.7.2)$$

В частных случаях $s = 1, 2, 3$ это уравнение раскрывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f(x), g(x) \rangle}{\partial \kappa_1} &= \left\langle f(x), \frac{dg(x)}{dx} \right\rangle + \left\langle \frac{df(x)}{dx}, g(x) \right\rangle, \\ \frac{\partial \langle f(x), g(x) \rangle}{\partial \kappa_2} &= \frac{1}{2} \left\langle f(x), \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, g(x) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx} \right\rangle, \\ \frac{\partial \langle f(x), g(x) \rangle}{\partial \kappa_3} &= \frac{1}{6} \left\langle f, \frac{d^3 g}{dx^3} \right\rangle + \frac{1}{6} \left\langle \frac{d^3 f}{dx^3}, g \right\rangle + \\ &\times \frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{dg}{dx} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{df}{dx} \frac{d^2 g}{dx^2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Полагая в первых двух формулах $f(x) = g(x) = \eta(x)$, получим, как и должно быть, третью и четвертую формулы (4.5.6).

Смешанная производная кумулянтной скобки равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \langle f(x), g(x) \rangle}{\partial \kappa_s \partial \kappa_p} &= \frac{1}{s! p!} \left\{ \left\langle \frac{d^{s+p}}{dx^{s+p}} fg \right\rangle - \left\langle \frac{d^s}{dx^s} g \right\rangle \left\langle \frac{d^p}{dx^p} f \right\rangle - \right. \\ &- \left. \left\langle \frac{d^p}{dx^p} g \right\rangle \left\langle \frac{d^s}{dx^s} f \right\rangle - \langle g \rangle \left\langle \frac{d^{s+p}}{dx^{s+p}} f \right\rangle - \langle f \rangle \left\langle \frac{d^{s+p}}{dx^{s+p}} g \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Для кумулянтной скобки третьего порядка, аргументами которой являются функции $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$, используя неполную кумулянтную скобку

$$(f, g, h) = fgh - \langle f \rangle (g, h) - \langle g \rangle (f, h) - h \langle f, g \rangle - - \langle f \rangle \langle g \rangle h,$$

а также (4.5.2), найдем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f, g, h \rangle}{\partial \kappa_s} &= \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dx^s} [(f, g, h) - \langle g, h \rangle f - \langle f, h \rangle g - \langle h \rangle fg + \right. \\ &+ \left. \langle f \rangle \langle h \rangle g + \langle g \rangle \langle h \rangle f] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

3. Совершенно так же можно отыскивать производные кумулянтных скобок и по совместным кумулянтам. И в этом случае сущест-

венное упрощение выкладок будет достигнуто при использовании круглых кумулянтных скобок. Так, например, если $f = f(x, y)$, $g = g(x, y)$, то

$$\frac{\partial \langle f, g \rangle}{\partial \kappa_{p, q}^{x, y}} = \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} [f, g] - \langle g \rangle f \right\rangle. \quad (4.7.4)$$

В частном случае $f = f(x)$, $g = g(y)$ уравнение (4.7.4) принимает вид ($p \neq 0$, $q \neq 0$)

$$\frac{\partial \langle f, g \rangle}{\partial \kappa_{p, q}^{x, y}} = \frac{1}{p! q!} \langle f_x^{(p)} \cdot g_y^{(q)} \rangle.$$

Если $f = f(x, y, z)$, $g = g(x, y, z)$, $h = h(x, y, z)$, то вычисления, проводимые на основании (3.3.5) и формулы (4.5.8), обобщенной очевидным образом на совокупность трех случайных величин, приводят к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f, g, h \rangle}{\partial \kappa_{p, q, r}^{x, y, z}} = \frac{1}{p! q! r!} \left\langle \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} [(f, g, h) - \langle g, h \rangle f - \right. \\ \left. - \langle f, h \rangle g - \langle h \rangle fg + \langle f \rangle \langle h \rangle g + \langle g \rangle \langle h \rangle f] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Если здесь положить $f = g = h = \eta(x)$, $q = r = 0$, то легко проверить, что (4.5.7), как и должно быть, переходит в третью формулу (4.5.5).

4. Обратимся теперь к задаче размыкания кумулянтных скобок и приведем ряд формул, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Докажем, прежде всего, следующую формулу размыкания:

$$\langle x, f(y) \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)}(y) \rangle \kappa_{1, s}^{x, y}. \quad (4.7.6)$$

Полагая в (4.7.4) $f(x, y) = x$, $g(x, y) = f(y)$, имеем

$$\frac{\partial \langle x, f(y) \rangle}{\partial \kappa_{p, q}^{x, y}} = \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} [(x, f) - \langle f \rangle x] \right\rangle.$$

Если p больше единицы, то справа будет нуль. Следовательно, рассматриваемая кумулянтная скобка зависит от совместного кумулянта только вида $\kappa_{1, q}^{x, y}$. Используя правила дифференцирования неполной кумулянтной скобки [см. (2.8.10)], найдем

$$\frac{\partial \langle x, f(y) \rangle}{\partial \kappa_{1, q}^{x, y}} = \frac{1}{q!} \left\langle \frac{\partial^{q+1}}{\partial x \partial y^q} (x, f) \right\rangle = \frac{1}{q!} \langle f^{(q)} \rangle,$$

откуда и следует формула (4.7.6), которая, в частном случае $y = x$ переходит в

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \kappa_{1+s}^x. \quad (4.7.7)$$

Для гауссовой совокупности $\{x, y\}$

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle f'(y) \rangle \langle x, y \rangle. \quad (4.7.8)$$

Если функция f зависит от двух случайных переменных, то

$$\langle x, f(y, z) \rangle = \sum_{k+l>0} \sum_{k,l} \frac{1}{k! l!} \left\langle \frac{\partial^{k+l}}{\partial y^k \partial z^l} f(y, z) \right\rangle \kappa_{1, k, l}^{x, y, z}. \quad (4.7.9)$$

В общем случае многих переменных

$$\begin{aligned} \langle x, f(y_1, y_2, \dots, y_N) \rangle &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_N>0} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_N} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_N!} \times \\ &\times \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_N}}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_N^{k_N}} f(y_1, y_2, \dots, y_N) \right\rangle \kappa_{1, k_1, k_2, \dots, k_N}^{x, y_1, y_2, \dots, y_N}. \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

Для гауссовых совокупностей случайных величин вместо (4.7.9), (4.7.10) имеем

$$\begin{aligned} \langle x, f(y, z) \rangle &= \langle f'_y \rangle \langle x, y \rangle + \langle f'_z \rangle \langle x, z \rangle, \\ \langle x, f(y_1, y_2, \dots, y_N) \rangle &= \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial f}{\partial y_k} \right\rangle \langle x, y_k \rangle. \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

Рассмотрим теперь кумулянтную скобку третьего порядка $\langle x, y, f(z) \rangle$. Полагая в (4.7.5) $f(x, y, z) = x$, $g(x, y, z) = y$, $h(x, y, z) = f(z)$ и используя правила дифференцирования неполных кумулянтных скобок, легко обнаружить, что исследуемая скобка зависит только от совместных кумулянтов вида $\kappa_{1, 1, p}^{x, y, z}$, $\kappa_{1, q}^{x, z}$, $\kappa_{1, s}^{y, z}$ и этой зависимости соответствуют производные ($p \geq 1$, $q \geq 1$, $s \geq 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle x, y, f(z) \rangle}{\partial \kappa_{1, 1, p}^{x, y, z}} &= \frac{1}{p!} \langle f^{(p)} \rangle, \\ \frac{\partial^2 \langle x, y, f(z) \rangle}{\partial \kappa_{1, q}^{x, z} \partial \kappa_{1, s}^{y, z}} &= \frac{1}{q! s!} \langle f^{(q+s)} \rangle = \frac{C_{q+s}^q}{(q+s)!} \langle f^{(q+s)} \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\langle x, y, f \rangle$ зависит линейно как от $\kappa_{1, 1, p}^{x, y, z}$, так и от $\kappa_{1, q}^{x, z}$, $\kappa_{1, s}^{y, z}$. В результате искомая формула замыкания принимает следующий вид:

$$\langle x, y, f(z) \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \left[\kappa_{1, 1, s}^{x, y, z} + \sum_{\lambda=1}^{s-1} C_s^\lambda \kappa_{1, \lambda}^{x, z} \kappa_{1, s-\lambda}^{y, z} \right]. \quad (4.7.12)$$

Если $z = y = x$, (4.7.12) переходит в

$$\langle x, x, f(x) \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \left[\kappa_{2+s}^x + \sum_{\lambda=1}^{s-1} C_s^{\lambda} \kappa_{1+\lambda}^x \kappa_{1+s-\lambda}^x \right]. \quad (4.7.13)$$

Когда совокупность $\{x, y, z\}$ гауссова,

$$\langle x, y, f(z) \rangle = \langle f''(z) \rangle \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle.$$

Для кумулянтной скобки четвертого порядка использование метода неполных кумулянтных скобок приводит к такой формуле размыкания:

$$\begin{aligned} \langle x, y, z, f(w) \rangle = & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \left[\langle x, y, z, w^{[s]} \rangle + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{s-1} C_s^k 3 \{ \langle x, w^{[k]} \rangle \langle x, z, w^{[s-k]} \rangle \}_s + \\ & \left. + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{l=1}^{s-1-k} C_s^k C_{s-k}^l \langle x, w^{[k]} \rangle \langle y, w^{[l]} \rangle \langle z, w^{[s-k-l]} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

Симметризация выполняется здесь по x, y, z . При $w = z = y = x$

$$\begin{aligned} \langle x, x, x, f(x) \rangle = & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \left[\kappa_{3+s}^x + 3 \sum_{k=1}^{s-1} C_s^k \kappa_{1+k}^x \kappa_{2+s-k}^x + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{l=1}^{s-1-k} C_s^k C_{s-k}^l \kappa_{1+k}^x \kappa_{1+l}^x \kappa_{1+s-k-l}^x \right]. \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

5. Если в формуле (4.7.12) положить $z = y$, то полученное разложение уже не будет «чистым» разложением по совместным кумулянтам $\kappa_{p,q}^{x,y}$, поскольку они здесь перемешиваются с кумулянтами случайной величины y . В этом случае гораздо удобнее дать другую формулу размыкания кумулянтной скобки $\langle x, y, f(y) \rangle$. На основании (4.5.8)

$$\frac{\partial \langle x, y, f(y) \rangle}{\partial \kappa_{p,q}^{x,y}} = \left\langle \frac{\partial \langle x, y, f(y) \rangle}{\partial \kappa_{p,q}^{x,y}} \right\rangle + \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} (x, y, f(y)) \right\rangle.$$

Поскольку [см. (2.8.4)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle x, y, f(y) \rangle}{\partial \kappa_{p,q}^{x,y}} &= \left\{ \begin{array}{ll} -f(y), & p=q=1 \\ 0, & p \neq q \neq 1 \end{array} \right\}, \\ \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} (x, y, f(y)) &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^q}{\partial y^q} (y, f(y)), & p=1 \\ 0, & p > 1 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

постольку рассматриваемая кумулянтная скобка зависит лишь о совместного кумулянта вида $\kappa_{1, q}^{x, y}$ и таким образом, что

$$\frac{\partial \langle x, y, f(y) \rangle}{\partial \kappa_{1, q}^{x, y}} = \begin{cases} -\langle f(y) \rangle + \left\langle \frac{d}{dy} (y, f(y)) \right\rangle = \langle y, f' \rangle, & q=1, \\ \frac{1}{q!} \left\langle \frac{d^q}{dy^q} (y, f) \right\rangle, & q > 1. \end{cases}$$

Так как значение этой производной уже не зависит от $\kappa_{1, q}^{x, y}$, то

$$\langle x, y, f(y) \rangle = \langle y, f' \rangle \langle x, y \rangle + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q!} \left\langle \frac{d^q}{dy^q} (y, f) \right\rangle \kappa_{1, q}^{x, y}.$$

Если теперь учесть, что [см. (2.8.10)]

$$\frac{d^q}{dy^q} (y, f(y)) = q f^{(q-1)} + (y, f^{(q)}),$$

о окончательно получаем

$$\begin{aligned} \langle x, y, f(y) \rangle &= \langle y, f' \rangle \langle x, y \rangle + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q!} [q \langle f^{(q-1)} \rangle + \\ &+ \langle y, f^{[q]} \rangle] \langle x, y^{[q]} \rangle. \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

При $y=x$ из (4.7.16) находим другую структуру формулы (4.7.13):

$$\langle x, x, f(x) \rangle = \langle x, f' \rangle D_x + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q!} [q \langle f^{(q-1)} \rangle + \langle x, f^{[q]} \rangle] \kappa_{1+q}^x.$$

Аналогично можно найти разложение кумулянтной скобки четвертого порядка $\langle x, y, y, f(y) \rangle$ по совместным кумулянтам $\kappa_{1, s}^{x, y}$. Используя (4.5.8), (2.8.4) и правила дифференцирования неполных кумулянтных скобок, найдем

$$\begin{aligned} \langle x, y, y, f(y) \rangle &= \langle y, y, f' \rangle \langle x, y \rangle + \frac{1}{2!} [4 \langle y, f' \rangle + \\ &+ \langle y, y, f'' \rangle] \langle x, y, y \rangle + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dy^s} (y, y, f) \right\rangle \langle x, y^{[s]} \rangle. \end{aligned} \quad (4.7.17)$$

Полагая $y = x$, придем к другому виду формулы (4.7.15):

$$\begin{aligned} \langle x, x, x, f(x) \rangle &= -2 \langle x, f \rangle D_x - \langle f \rangle \kappa_3^x + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dx^s} (x, x, f) \right\rangle \kappa_{1+s}^x. \end{aligned}$$

6. Если функция f зависит от многих переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$, то формула размыкания для кумулянтных скобок третьего порядка принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle x, y_l, f(y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle &= -\langle f \rangle \langle x, y_l \rangle + \\ &+ \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n>0} \sum_{k_1!k_2!\dots!k_n!} \frac{1}{k_1!k_2!\dots!k_n!} \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_n^{k_n}} \times \right. \\ &\times (y_l, f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \Big\rangle \mathcal{K}_{1, k_1, k_2, \dots, k_n}^{x, y_1, y_2, \dots, y_n}. \end{aligned} \quad (4.7.18)$$

Кумулянтная скобка четвертого порядка с той же функцией размыкается так:

$$\begin{aligned} \langle x, y_p, y_q, f(y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle &= -\langle y_p, f \rangle \langle x, y_q \rangle - \\ &- \langle y_q, f \rangle \langle x, y_p \rangle - \langle f \rangle \langle x, y_p, y_q \rangle + \\ &+ \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n>0} \sum_{k_1!k_2!\dots!k_n!} \frac{1}{k_1!k_2!\dots!k_n!} \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_n^{k_n}} \times \right. \\ &\times (y_p, y_q, f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \Big\rangle \mathcal{K}_{1, k_1, k_2, \dots, k_n}^{x, y_1, y_2, \dots, y_n}. \end{aligned} \quad (4.7.19)$$

В общем случае произвольного числа аргументов y_i , стоящих по отдельности в кумулянтной скобке, можно прийти к следующей формуле размыкания (p_i принимает любые значения из $1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \langle x, y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_m}, f(y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle &= \\ &= - \sum_{\lambda=0}^{m-1} C_m^\lambda \{ \langle y_{p_{m-\lambda+1}}, \dots, y_{p_m}, f \rangle \langle x, y_{p_1}, \dots, y_{p_{m-\lambda}} \rangle \}_s + \\ &+ \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n>0} \sum_{k_1!k_2!\dots!k_n!} \frac{1}{k_1!k_2!\dots!k_n!} \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_n^{k_n}} \times \right. \\ &\times (y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_m}, f) \Big\rangle \mathcal{K}_{1, k_1, k_2, \dots, k_n}^{x, y_1, y_2, \dots, y_n}. \end{aligned} \quad (4.7.20)$$

Некоторые другие формулы размыкания подобных кумулянтных скобок и их важные частные случаи приведены в приложении II.

Глава 5

МОДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

5.1. Определения

1. Представляется интересным и важным исследовать распределения, соответствующие конечному числу отличных от нуля кумулянтов. Такие распределения, являясь в определенном смысле про-

стейшими, должны служить хорошей моделью тех вероятностных распределений, высшие кумулянты которых достаточно малы. Вместе с этим распределения, обладающие конечным набором кумулянтов, имеют весьма характерные особенности. Их рассмотрению и посвящена настоящая глава.

Будем говорить, что случайная величина обладает *модельным распределением n -го порядка*, если кумулянты этой случайной величины κ_s равны нулю для всех $s > n$.

Модельным распределением *первого* порядка является, очевидно, распределение детерминированной величины, поскольку для таких величин все кумулянты, кроме первого, равны нулю. Модельное распределение *второго* порядка есть не что иное, как гауссово распределение.

Модельные распределения порядка выше второго будем называть *негауссовыми* модельными распределениями. Модельное распределение *четвертого* порядка, все кумулянты которого, начиная с пятого, равны нулю, будем называть *экспецесным* распределением.

2. «Характеристическая функция» модельного распределения n -го порядка по определению равна

$$\Theta_n(u) \equiv \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(ju)^k}{k!} \kappa_k \right\}.$$

Тем самым «плотность вероятности» модельного распределения n -го порядка определяется интегралом

$$W_n(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jux} \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(ju)^k}{k!} \kappa_k \right\} du. \quad (5.1.1)$$

Этот интеграл при $n > 2$ не принадлежит к тем, которые выражаются через элементарные функции, и требует табулирования. Вместе с этим, как это следует из § 3.1, формула (5.1.1) представляет нам «плотность вероятности» модельного распределения в канонической форме:

$$W_n(x) \equiv W_n(x; \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n).$$

Поэтому согласно (3.1.4) оно удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений ($s = 1, 2, 3, \dots, n$):

$$\frac{\partial W_n(x; \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)}{\partial \kappa_s} = \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial^s W_n(x; \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)}{\partial x^s}$$

5.2. Особенности модельных распределений

1. Поставим вопрос: действительно ли функция

$$\Theta_n(u) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(ju)^k}{k!} \kappa_k \right\} \quad (5.2.1)$$

является характеристической функцией некоторого вероятностного распределения?

Если бы n было бесконечно большим, то вопрос был бы излишним. Если бы мы рассматривали только случаи $n = 1$ и $n = 2$, то вопрос имел бы тривиальный ответ. Однако мы рассматриваем конечные значения $n > 2$.

Следующая теорема Марцинкевича [50] исчерпывающим образом отвечает на поставленный вопрос: *никакая функция вида*

$$\Theta(u) = \exp(a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n)$$

при $n > 2$ не может быть характеристической функцией (a_i -комплексные числа).

Это значит, что никакой подбор значений кумулянтов $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ не сделает (5.2.1) характеристической функцией некоторого вероятностного распределения. В свою очередь, это ведет к тому, что (5.1.1) не может быть плотностью вероятности. Таким образом, негауссовы модельные распределения не являются вероятностными распределениями. Выясним, в чем тут дело.

2. Будем исходить из того, что функция (5.2.1), где κ_h -величины, обладающие свойствами кумулянтов некоторого вероятностного распределения, не является характеристической функцией. Это значит, что $\Theta_n(u)$ не удовлетворяет хотя бы одному из пяти свойств (1.1.6). Так как, однако, $\Theta_n(u)$ при конечных κ_h представляет собой непрерывную функцию, такую, что $\Theta_n(0) = 1$, то остается рассмотреть следующие три свойства:

$$1) \quad |\Theta_n(u)| \leq \Theta_n(0). \quad 2) \quad \Theta_n(-u) = \Theta_n^*(u),$$

$$3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_n(u) e^{-iux} du \geq 0 \text{ для всех } x. \quad (5.2.2)$$

Легко видеть, что второму свойству (5.2.2) функция (5.2.1) удовлетворяет автоматически.

Первому свойству также можно удовлетворить, если соответствующим образом подобрать величины и знаки $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_n$. Так, например, если мы рассматриваем симметричное эксцессное распределение, для которого

$$\Theta_4(u) = \exp\left(-\frac{1}{2} \kappa_2 u^2 + \frac{1}{24} \kappa_4 u^4\right),$$

то, очевидно, кумулянт κ_4 должен быть отрицательным. Разумеется, при подборе значений кумулянтов необходимо следить за тем, чтобы они не выходили за рамки, установленные для них основными неравенствами (см. § 2.6). Так, отрицательное значение κ_4 не должно превышать $-2\kappa_2^2$. Тем не менее подобный подбор кумулянтов возможен.

Остается третье свойство, которое требует, чтобы сопряженная Фурье от характеристической функции, т. е. плотность вероятности соответствующего распределения, была неотрицательной функцией

для всех значений x . Вот этому-то свойству и не удовлетворяет $\Theta_n(u)$ для любых конечных $n > 2$.

Следовательно, не существует таких вероятностных распределений, кумулянты которых κ_s обращаются в нуль для всех $s \geq n > 2$. Не существует в том смысле, что если их формально построить согласно (5.1.1), то функция $W_n(x)$ для каких-то значений x будет принимать отрицательные значения. И именно поэтому $W_n(x)$ нельзя считать плотностью вероятности. Заметим при этом, что если не считать условия нормировки, то все ограничения, которые налагаются на плотность вероятности, как раз и сводятся к тому, чтобы она была неотрицательной функцией x .

3. Итак, модельные распределения не являются вероятностными распределениями, и это происходит по той причине, что функция $W_n(x)$ на некоторых x -множествах (обозначим их через P_n^-) принимает отрицательные значения.

Несмотря на это, модельные распределения весьма удобны для приближенного описания вероятностных распределений. В этом плане $W_n(x)$ следует рассматривать как сравнительно простые функции, которыми можно аппроксимировать негауссовы вероятностные распределения. Модельные распределения удобны потому, что они обладают рядом полезных свойств. Так, например, из результатов § 4.2 следует, что все модельные распределения инвариантны к линейным преобразованиям случайных переменных. Следовательно, отмеченная выше «замечательность» гауссова распределения по отношению к линейным преобразованиям не является исключением. Ее скорее следует отнести к свойству линейности системы, чем к распределениям, хотя среди всех *вероятностных* распределений указанной инвариантностью, действительно, обладает только гауссово.

Из инвариантности модельного распределения к линейным преобразованиям переменных следует также и его устойчивость. Другими словами, сумма одинаково модельно распределенных величин сама имеет то же самое модельное распределение. Это связано с тем, что линейное преобразование не может образовать новых статистических связей. Так, если на входе линейного преобразования существовали статистические связи только первых s порядков, то и на выходе отличными от нуля могут быть статистические связи только тех же первых s порядков.

Работа с модельными распределениями технически более проста и при анализе *нелинейных* преобразований случайных переменных. Как следует из § 4.5, получение статистических характеристик выходов нелинейных преобразований представляется тем более простой операцией, чем меньше кумулянтов входит в набор, описывающий входные переменные.

К модельным распределениям удобно обращаться и в том случае, когда роль высших кумулянтов распределения незначительна, когда случайные переменные представляются достаточно полно уже низшими кумулянтами, а учет высших кумулянтов практически мало сказывается на результате. Еще более целесообразно заменять

модельными те вероятностные распределения, высшие кумулянты которых вообще не оказывают никакого влияния на исследуемые статистические характеристики. Так, например, при анализе дисперсии выхода квадратичного преобразования случайной величины ξ при любой плотности вероятности W_ξ достаточно аппроксимировать ее эксцессным распределением, ибо согласно (4.5.7) дисперсия на выходе зависит лишь от первых четырех кумулянтов входа.

4. Разумеется, использовать модельные распределения для приближенного описания тех или иных вероятностных распределений необходимо с достаточной осторожностью. Очевидно, например, что отыскание вероятности пребывания x внутри множества P_n^- приведет к отрицательной величине. К неправильным результатам может привести также вычисление среднего от некоторой положительной функции, принимающей внутри области P_n^- достаточно большие значения. Однако, по-видимому, в подавляющем большинстве случаев, особенно, когда находятся интегральные характеристики вероятностных распределений, работа с модельными распределениями вряд ли приведет к большим неприятностям.

5. Найденные в § 2.6 неравенства, ограничивающие возможные значения кумулянтов, позволяют другим путем убедиться в том, что модельные распределения любого конечного порядка, большего двух, не являются вероятностными распределениями.

В самом деле, возьмем, например, модельное распределение третьего порядка с набором кумулянтов $(0, \kappa_2, \kappa_3, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ и поставим вопрос: какие допустимые значения может иметь третий кумулянт κ_3 или коэффициент асимметрии γ_3 ? Из (2.6.2) следует, что γ_3 при $\gamma_4 = 0$ должен удовлетворять неравенству $\gamma_3^2 \leq 2$. Если же теперь взять неравенство (2.6.7), которое принимает во внимание не только значения γ_4 , но и значения γ_5, γ_6 , то при $\gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0$ для γ_3 мы получим $\gamma_3^2 \leq 10/21$. Это неравенство оставляет возможным значения γ_3 существенно меньший интервал. Чем больше последующих кумулянтов учитывается, тем меньший интервал получается для γ_3^2 . В конце концов, при учете всех высших кумулянтов и при равенстве их всех нулю, мы придем к $\gamma_3^2 \leq 0$. Это значит, что никакое вероятностное распределение не может иметь отличными от нуля только первые три кумулянта.

Такая же ситуация наблюдается и для четвертого кумулянта. Полагая $\gamma_3 = 0$, из (2.6.2) получим $-2 \leq \gamma_4$. Полагая в (2.6.4) $\gamma_3 = \gamma_6 = 0$, придем к $-0,63 \leq \gamma_4 \leq 9,63$, т. е. к гораздо меньшему интервалу возможных значений коэффициента эксцесса. Продолжая этот процесс бесконечно, получим $\gamma_4 = 0$. Следовательно, и симметричное эксцессное распределение не является вероятностным распределением.

Совершенно аналогично можно рассмотреть любое модельное распределение конечного порядка $n > 2$ и убедиться, что интервалы возможных значений для кумулянтов $\kappa_3, \kappa_4, \dots, \kappa_n$ при учете равенства нулю высших кумулянтов $\kappa_{n+1} = \kappa_{n+2} = \dots = \kappa_N = 0$ стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$.

5.3. Модельные приближения

1. Во многих статистических задачах часто приходится иметь дело с нелинейными уравнениями для случайных переменных, статистические характеристики которых подлежат изучению. Иногда для них удастся отыскать функции распределения. Однако чаще всего приходится ограничиваться вычислением лишь моментов распределения. Для моментов составляют уравнения, которые вследствие нелинейности исходных уравнений образуют бесконечную цепочку. Так, например, в уравнение для первого момента входит второй и третий момент, для второго — третий и четвертый и т. д.

Найти точное решение этой бесконечной цепочки уравнений невозможно. Обычно эту цепочку обрывают на произвольном члене и решают оставшуюся часть уравнений. Такая операция эквивалентна тому, что все высшие моменты, начиная с некоторого, полагаются равными нулю. Оставшаяся система уравнений для конечного числа моментов позволяет их вычислить. Полученные значения рассматриваются как некоторые приближенные выражения для моментов.

Здесь следует особо подчеркнуть, что подобное обрывание моментов является совершенно необоснованной операцией, ибо не только не существует никакого вероятностного распределения, все высшие моменты которого, начиная, скажем, с α_{n+1} , равны нулю, но невозможно даже графически изобразить такую функцию $W(x)$. У любого распределения, обладающего какой-либо «шириной», все высшие моменты не могут обращаться в нуль.

В самом деле, если положить отличными от нуля только первые n моментов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то согласно (1.1.7) характеристическая функция примет вид

$$\Theta(u) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} (ju)^k$$

и, следовательно, вероятностное распределение будет равно

$$W(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ju)^k e^{-iux} du = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \alpha_k \delta^{(k)}(x). \quad (5.3.1)$$

Таким образом, плотность вероятности, соответствующая конечному набору моментов, представляет собой конечную суперпозицию дельта-функции и ее производных. Эта функция не имеет ширины, и ее невозможно «нарисовать». Ясно, что функция (5.3.1) ни в коей мере не похожа на плотность вероятности какой-либо физической случайной переменной, и поэтому метод отыскания хотя бы и приближенных значений моментов путем обрывания их ряда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots$ представляется совершенно неприемлемым.

2. Совсем другое дело, если на основании исходных уравнений для случайных переменных составлять уравнения для их кумулянтов. Цепочка уравнений для кумулянтов также получится бесконечной и зацепляющейся. И чтобы находить приближенные решения, нам также придется оборвать ряд кумулянтов, скажем, начиная с κ_{n+1} . Однако эта операция, во-первых, сохранит нам ненулевые значения всех моментов (они будут выражаться теперь чем-рез n первых кумулянтов) и, во-вторых, что самое главное, даст возможность описать случайные переменные модельными распределениями $W_n(x)$ — функциями, имеющими определенную форму и ширину.

Таким образом, оборвав ряд кумулянтов, мы приближенно заменим неизвестное вероятностное распределение $W(x)$ модельным распределением $W_n(x)$. В этом смысле можно говорить о *модельных приближениях n -го порядка*.

Модельное приближение второго порядка является, очевидно, *гауссовым приближением*. Модельное приближение четвертого порядка, соответствующее эксцессному распределению, будем называть *эксцессным приближением*. Оно учитывает отличие от нуля первых четырех кумулянтов и представляет собой простейшее негауссово приближение.

3. Безусловно, интересно и практически важно выяснить, насколько точно может быть описано какое-либо негауссово вероятностное распределение модельными приближениями. Другими словами, возникает вопрос о сходимости модельных распределений $W_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ к соответствующему вероятностному распределению.

Решение этого вопроса выходит за рамки настоящей книги и нуждается в специальном математическом исследовании. Оставляя в стороне выяснение условий такой сходимости, мы будем в дальнейшем предполагать, что для всех рассматриваемых в этой книге конкретных статистических задач подобная сходимость имеет место.

5.4. Эксцессное распределение

1. Эксцессное распределение определяется формулой

$$\begin{aligned} W_3(x) &\equiv W_4(x; \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \exp \left\{ \sum_{k=1}^4 \frac{\kappa_k}{k!} (ju)^k \right\} du. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Оно может быть в соответствии с (1.2.9), (1.2.10) представлено также рядом Эджворта по производным гауссовой плотности вероятности:

$$W_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3k+4l} \kappa_3^k \kappa_4^l}{(3!)^k (4!)^l k! l!} W_{\Gamma}^{(3k+4l)}(x). \quad (5.4.2)$$

2. Как уже указывалось, всякое негауссово модельное распределение на некотором множестве значений аргумента принимает отрицательные значения. Выясним на примере эксцессного распределения, насколько велико это множество и насколько большие отрицательные значения может принимать $W_n(x)$. Для этого рассмотрим симметричное эксцессное распределение

$$W_3^0(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \kappa_2 u^2 + \frac{1}{24} \kappa_4 u^4\right) \cos ux \, du,$$

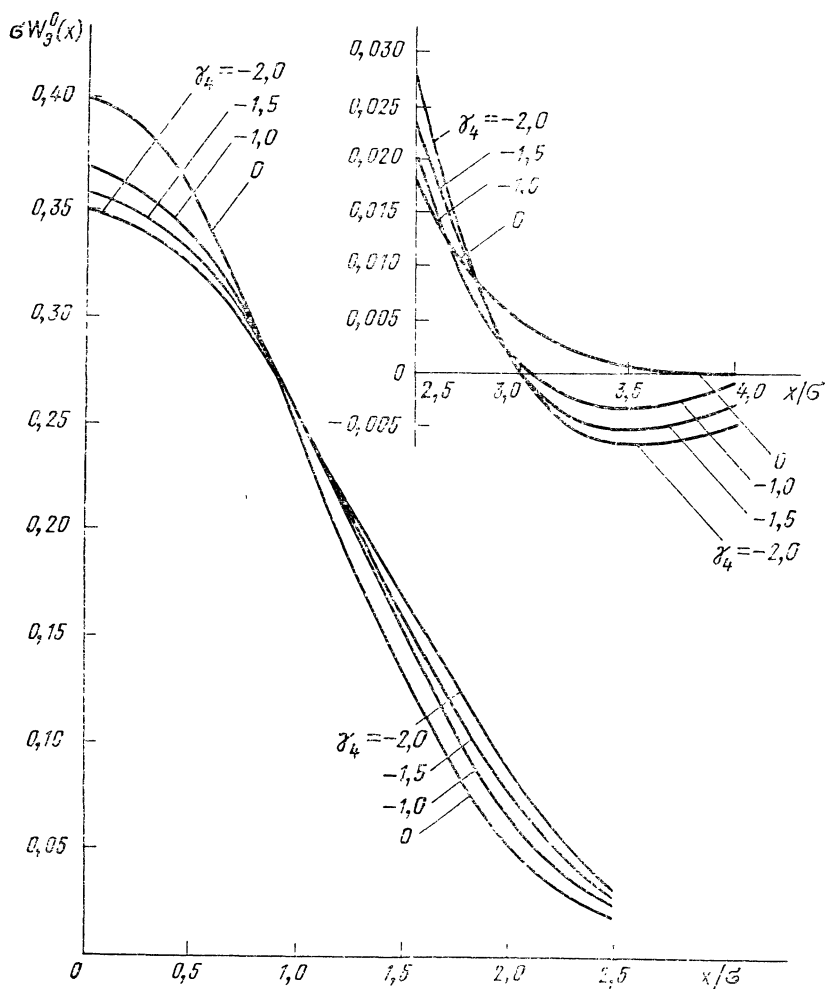


Рис. 5.1.

четвертый кумулянт которого должен согласно § 5.2 принимать только отрицательные значения. Вводя безразмерные переменные $y = x/\sigma = x/\sqrt{\kappa_2}$, $v = u\sigma$, получим

$$W_3^0(x) = W_3^0(y\sigma) = \frac{1}{\pi\sigma} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma_4}{24} v^4\right) \cos vy \, dv. \quad (5.4.3)$$

На рис. 5.1 показаны вычисленные с помощью ЭЦВМ графики безразмерной функции $\sigma W_3^0(x)$, определяемой формулой (5.4.3) в зависимости от x/σ , для значений $\gamma_4 = -1$, $\gamma_4 = -1,5$, $\gamma_4 = -2$. Для сравнения на этом же рисунке приведена кривая, соответствующая $\gamma_4 = 0$, т. е. гауссовому распределению. Как следует из приведенных графиков, во-первых, вид эксцессного распределения, действительно, заметно отличается от гауссова при $-2 < \gamma_4 < -1$, во-вторых, отчетливо видно то множество значений x/σ , на котором эксцессное распределение становится отрицательным, и, в-третьих, также хорошо видно, что принимаемые отрицательные значения не столь велики. По отношению к максимальному значению $W_3^0(0)$ они имеют порядок трех процентов, в то время как общая доля «отрицательной вероятности» даже для $\gamma_4 = -2$ не превышает полутора процентов.

Таким образом, можно предполагать, что особенности модельных распределений, связанные с существованием «отрицательной вероятности» в том случае, когда их кумулянты подчиняются ограничениям, присущим вероятностным распределениям, вряд ли имеют особо существенное значение для определения интегральных статистических характеристик. Вместе с тем, несомненной является необходимость табулирования модельных распределений для различного набора кумулянтных коэффициентов $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \dots$, чтобы в полной мере представлять опасности, связанные с отрицательной вероятностью, и более обоснованно использовать их для приближенного описания негауссовых распределений.

3. Интересно сравнить приведенный точный график эксцессного распределения с кривыми, получаемыми при аппроксимации этого распределения первыми членами ряда Эджворта. Симметричное эксцессное распределение (5.4.3) согласно (5.4.2) может быть представлено следующим рядом Эджворта:

$$W_3^0(x) = W_3^0(y\sigma) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{\gamma_4}{4!}\right)^l \frac{d^{4l}}{dy^{4l}} W_1^0(y). \quad (5.4.4)$$

При ограничении двумя и тремя членами этого ряд соответственно получим

$$W_{32}^0(x) \equiv W_1^0(y) + \frac{\gamma_4}{24} \frac{d^4}{dy^4} W_1^0(y),$$

$$W_{33}^0(x) \equiv W_1^0(y) + \frac{\gamma_4}{24} \frac{d^4}{dy^4} W_1^0(y) + \frac{\gamma_4^2}{1152} \frac{d^8}{dy^8} W_1^0(y),$$

где

$$W_r^0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right).$$

На рис. 5.2 показаны кривые, соответствующие точному значению эксцессного распределения $W_3^0(x)$ и его аппроксимации функ-

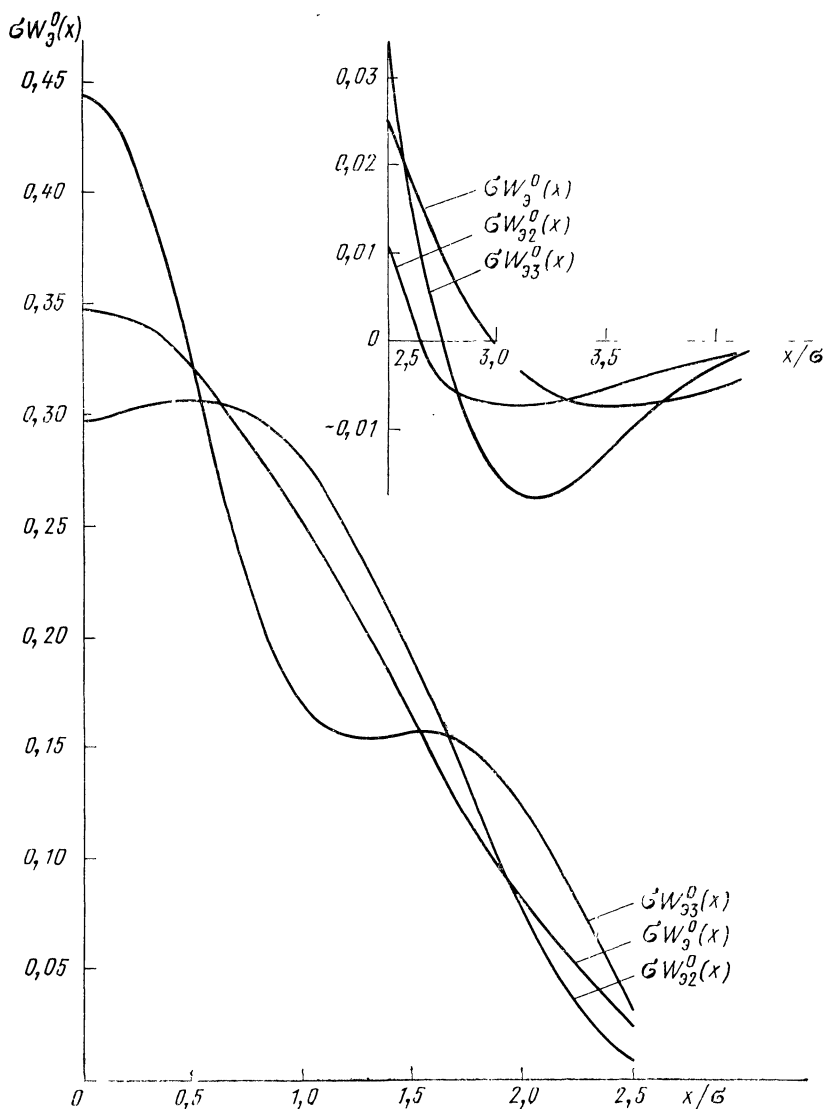


Рис. 5.2.

циями $W_{s2}^0(x)$ и $W_{s3}^0(x)$ для частного случая $\gamma_4 = -2$. Из сравнения этих графиков видно, что учет лишь первых трех членов ряда Эджворта дает результаты, сильно отличающиеся от точного распределения. Это отличие особенно сильно сказывается в неблагоприятную сторону в области отрицательных вероятностей, что может привести к большим ошибкам при нахождении различных средних.

Кроме того, учет трех членов ряда (5.4.4) не имеет каких-либо видимых преимуществ по сравнению с учетом всего лишь двух членов, ибо нельзя сказать, что $W_{s3}^0(x)$ «находится ближе» к $W_s^0(x)$, чем $W_{s2}^0(x)$, скорее даже наоборот. Это может означать только одно — ряд Эджворта (5.4.4) плохо сходится. Для более или менее хорошего приближения к $W_s^0(x)$ следует учитывать значительное число членов ряда. Последнее обстоятельство также подчеркивает преимущества работы с модельными распределениями вообще и с эксцессным распределением (5.4.1) в частности.

КУМУЛЯНТНОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава 6

КУМУЛЯНТНЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Основные определения

1. Как известно (см., например, [34]), к понятию случайного процесса приходят, рассматривая семейство случайных величин ξ , зависящее от времени t как от параметра: $\xi = \xi(t)$. Если зафиксировать моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_N$, то совокупность $\{\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_N)\}$ представляет собой совокупность N случайных величин, различные вероятностные характеристики которой зависят от выбранных значений $t_1, t_2, \dots, t_N$.

Выбирая число фиксированных моментов времени различным, мы можем описывать случайный процесс с разной степенью полноты. Простейшей плотностью вероятности случайного процесса $\xi(t)$ является одномерная или *одномоментная* плотность вероятности $W_\xi(x, t)$, удовлетворяющая условию нормировки при любом значении t . Последнее название подчеркивает, что эта плотность вероятности описывает статистические характеристики случайного процесса, рассматриваемого в один момент времени. В соответствии с этим назовем *N -моментной* плотностью вероятности случайного процесса $\xi(t)$ N -мерную плотность вероятности $W_\xi(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N)$, удовлетворяющую при любых t_i и N условию нормировки и представляющую случайный процесс, рассматриваемый в N моментах времени.

Таким образом, бесконечная последовательность плотностей вероятности

$$W_\xi(x, t), W_\xi(x_1, t_1; x_2, t_2), \dots, W_\xi(x_1, t_1; \dots, x_N, t_N), \dots \quad (6.1.1)$$

дает исчерпывающую информацию о случайном процессе $\xi(t)$.

Как и для случайных величин, для случайных процессов могут быть введены условные плотности вероятности. Так,

$$W_{\xi}(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k | x_{k+1}, t_{k+1}; \dots, x_N, t_N) \equiv \\ \equiv W_{\xi}(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N) / W_{\xi}(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k),$$

где $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_N$ является $(N - k)$ -мерной, но N -моментной условной плотностью вероятности. Значения $x_1, x_2, \dots, x_k$, так же, как и все моменты времени, служат параметрами распределения.

Введение условных плотностей вероятности позволяет представить N -моментное распределение случайного процесса следующим образом:

$$W_{\xi}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N) = W_{\xi}(x_1, t_1) \times \\ \times W_{\xi}(x_1, t_1 | x_2, t_2) \cdot W_{\xi}(x_1, t_1; x_2, t_2 | x_3, t_3) \times \\ \times \dots \cdot W_{\xi}(x_1, t_1; \dots; x_{N-1}, t_{N-1} | x_N, t_N). \quad (6.1.2)$$

2. Говорят, что значения случайного процесса $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_N)$ статистически независимы между собой, если

$$W_{\xi}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N) = \prod_{k=1}^N W_{\xi}(x_k, t_k). \quad (6.1.3)$$

В этом случае процесс полностью описывается одномоментной плотностью вероятности.

Случайный процесс $\xi(t)$, для которого

$$W_{\xi}(x_1, t_1; \dots; x_{N-1}, t_{N-1} | x_N, t_N) = W_{\xi}(x_N, t_N),$$

называется *совершенно случайным* процессом [6]. Для него также справедливо соотношение (6.1.3) для любых неравных между собой моментов времени, в том числе и сколь угодно близких. Это значит, что у совершенно случайного процесса значения $\xi(t)$ и $\xi(t + \tau)$ статистически независимы при любых сколь угодно малых $\tau \neq 0$.

6.2. Моментные и кумулянтные функции

1. Характеристическая функция случайного процесса $\xi(t)$

$$\Theta_{\xi}(u, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x, t) e^{iux} dx \equiv \langle e^{iu\xi(t)} \rangle$$

есть одномоментная характеристическая функция, зависящая от времени t как от параметра. Для N -моментной плотности вероятности случайного процесса $\xi(t)$ аналогично определяется N -моментная характеристическая функция

$$\Theta_{\xi}(u_1, t_1; \dots; u_N, t_N) \equiv \langle \exp [j(u_1 \xi(t_1) + u_2 \xi(t_2) + \\ + \dots + u_N \xi(t_N))] \rangle.$$

Бесконечная последовательность характеристических функций

$$\Theta_{\xi}(u, t), \Theta_{\xi}(u_1, t_1; u_2, t_2), \dots, \Theta_{\xi}(u_1, t_1; \dots; u_N, t_N), \dots, \quad (6.2.1)$$

так же как и (6.1.1), полностью описывает случайный процесс.

Если N -моментную характеристическую функцию случайного процесса разложить в степенной ряд по u_i , то коэффициенты разложения будут функциями параметров $t_1, t_2, \dots, t_N$ [см. (1.6.1), (1.6.3)], являясь совместными моментами N -случайных величин $\xi(t_i)$:

$$\alpha_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_N)} \equiv \langle \xi^{n_1}(t_1) \xi^{n_2}(t_2) \dots \xi^{n_N}(t_N) \rangle. \quad (6.2.2)$$

Введем *моментные функции* случайного процесса $\xi(t)$:

$$\alpha_s^{\xi}(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) \equiv \langle \xi(t_{\lambda_1}) \xi(t_{\lambda_2}) \dots \xi(t_{\lambda_s}) \rangle. \quad (6.2.3)$$

Число s есть *порядок* моментной функции. Тогда (6.2.2) запишется как ($n_1 + n_2 + \dots + n_N = s$)

$$\begin{aligned} \alpha_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_N)} &= \alpha_s^{\xi}(\underbrace{t_1, t_1, \dots, t_1}_{n_1}, \underbrace{t_2, t_2, \dots, t_2}_{n_2}, \dots \\ &\dots, \underbrace{t_N, t_N, \dots, t_N}_{n_N}) \equiv \alpha_s^{\xi}(t_1^{[n_1]}, t_2^{[n_2]}, \dots, t_N^{[n_N]}). \end{aligned}$$

В соответствии с этими обозначениями и с (1.6.3) имеем следующее разложение характеристической функции случайного процесса по моментным функциям [5, 11]:

$$\begin{aligned} \Theta_{\xi}(u_1, t_1; \dots; u_N, t_N) &= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^s \alpha_s^{\xi}(t_1^{[n_1]}, t_2^{[n_2]}, \dots \\ &\dots, t_N^{[n_N]}) u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_N^{n_N} = 1 + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s=1}^N \alpha_s^{\xi}(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \dots u_{\lambda_s}. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Заметим, что согласно (1.6.2) моментную функцию (6.2.3) можно определить и так:

$$\alpha_s^{\xi}(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) \equiv (-j)^s \left[\frac{\partial^s \Theta_{\xi}(u_1, t_1; \dots; u_N, t_N)}{\partial u_{\lambda_1} \partial u_{\lambda_2} \dots \partial u_{\lambda_s}} \right]_{u_i=0}.$$

Поскольку моментная скобка (6.2.3) симметрична по отношению к $\xi(t_i)$, моментная функция $\alpha_s^{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_s)$ есть симметрическая функция всех своих аргументов.

Если все аргументы моментной функции приравнять между собой, то получим момент s -го порядка случайного процесса:

$$\alpha_s^{\xi}(t) \equiv \alpha_s^{\xi}(t^{[s]}) = \langle \xi^s(t) \rangle.$$

Бесконечная последовательность моментных функций

$$\alpha_1(t_1), \alpha_2(t_1, t_2), \alpha_3(t_1, t_2, t_3), \dots, \alpha_s(t_1, t_2, \dots, t_s), \dots \quad (6.2.5)$$

исчерпывающим и однозначным образом представляет случайный процесс (если, разумеется, выполнены условия ее сходимости).

2. Аналогично вводятся и *кумулянтные функции* случайного процесса ($s = n_1 + n_2 + \dots + n_N$):

$$\begin{aligned} \kappa_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_N)} &\equiv \underbrace{\langle \xi(t_1), \xi(t_1), \dots, \xi(t_1),}_{n_1} \\ &\quad \underbrace{\xi(t_2), \xi(t_2), \dots, \xi(t_2),}_{n_2} \dots, \underbrace{\xi(t_N), \dots, \xi(t_N)}_{n_N} \rangle \equiv \\ &\equiv \langle \xi(t_1)^{[n_1]}, \xi(t_2)^{[n_2]}, \dots, \xi(t_N)^{[n_N]} \rangle \equiv \\ &\equiv \kappa_s^{\xi}(\underbrace{t_1, t_1, \dots, t_1}_{n_1}, \underbrace{t_2, t_2, \dots, t_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{t_N, t_N, \dots, t_N}_{n_N}) \equiv \\ &\equiv \kappa_s^{\xi}(t_1^{[n_1]}, t_2^{[n_2]}, \dots, t_N^{[n_N]}). \end{aligned}$$

Кумулянтная функция может быть также определена и как^{*)}

$$\kappa_s^{\xi}(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) \equiv (-j)^s \left[\frac{\partial^s \ln \Theta_{\xi}(u_1, t_1; \dots; u_N, t_N)}{\partial u_{\lambda_1} \partial u_{\lambda_2} \dots \partial u_{\lambda_s}} \right]_{u_i=0}. \quad (6.2.6)$$

Характеристическая функция случайного процесса выражается через кумулянтные функции на основании (1.6.1), (1.6.3) следующим образом ($n_1 + n_2 + \dots + n_N = s$):

$$\begin{aligned} \Theta_{\xi}(u_1, t_1; u_2, t_2; \dots; u_N, t_N) &= \\ &= \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^s \kappa_s^{\xi}(t_1^{[n_1]}, t_2^{[n_2]}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, t_N^{[n_N]}) u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_N^{n_N} \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s=1}^N \kappa_s^{\xi}(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \dots u_{\lambda_s} \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

^{*)} Заметим, что Р.Л. Стратонович, вводя кумулянтные функции согласно (6.2.6), назвал их *обобщенными корреляционными функциями* [5, 10].

При одинаковых аргументах кумулянтные функции переходят в кумулянты случайного процесса $\kappa_s^E(t) \equiv \kappa_s^u(t, \dots, t)$.

Бесконечная последовательность кумулянтных функций

$$\kappa_1(t_1), \kappa_2(t_1, t_2), \kappa_3(t_1, t_2, t_3), \dots, \kappa_s(t_1, t_2, \dots, t_s), \dots \quad (6.2.8)$$

при выполнении соответствующих условий сходимости так же, как и (6.2.5), исчерпывающим и однозначным образом представляет случайный процесс. В то же время последовательность кумулянтных функций в отличие от последовательностей моментных функций (6.2.5), плотностей вероятности (6.1.1) и характеристических функций (6.2.1) является *фундаментальной* последовательностью в том же смысле, что и набор кумулянтов. Это связано с тем, что кумулянтные функции (6.2.8) случайного процесса могут задаваться в известных пределах *независимо* друг от друга.

В дальнейшем мы будем представлять случайный процесс именно кумулянтными функциями, полагая его полностью заданным, если заданы все эти функции. Весь последующий анализ случайных процессов и их преобразований мы также будем вести «на языке» кумулянтных функций.

3. На основании (2.2.1), (2.2.2) легко установить связь моментных и кумулянтных функций. Вводя скобки симметризации и для моментных функций, положив, например,

$$3\{\alpha_1(t_1) \cdot \alpha_2(t_2, t_3)\}_s \equiv \alpha_1(t_1) \alpha_2(t_2, t_3) + \\ + \alpha_1(t_2) \alpha_2(t_1, t_3) + \alpha_1(t_3) \alpha_2(t_1, t_2),$$

получим следующие выражения первых пяти кумулянтных функций через моментные (ср. с [5, 11, 17]):

$$\begin{aligned} \kappa_1(t) &= \alpha_1(t), \\ \kappa_2(t_1, t_2) &= \alpha_2(t_1, t_2) - \alpha_1(t_1) \alpha_1(t_2), \\ \kappa_3(t_1, t_2, t_3) &= \alpha_3(t_1, t_2, t_3) - 3\{\alpha_1(t_1) \alpha_2(t_2, t_3)\}_s + \\ &+ 2\alpha_1(t_1) \alpha_1(t_2) \alpha_1(t_3), \\ \kappa_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \alpha_4(t_1, t_2, t_3, t_4) - 3\{\alpha_2(t_1, t_2) \alpha_2(t_3, t_4)\}_s - \\ &- 4\{\alpha_1(t_1) \alpha_3(t_2, t_3, t_4)\}_s + 2 \cdot 6\{\alpha_1(t_1) \alpha_1(t_2) \alpha_2(t_3, t_4)\}_s - \\ &- 6\alpha_1(t_1) \alpha_1(t_2) \alpha_1(t_3) \alpha_1(t_4), \\ \kappa_5(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) &= \\ &= \alpha_5(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) - 5\{\alpha_1(t_1) \alpha_4(t_2, t_3, t_4, t_5)\}_s - \\ &- 10\{\alpha_2(t_1, t_2) \alpha_3(t_3, t_4, t_5)\}_s + 2 \cdot 10\{\alpha_1(t_1) \alpha_1(t_2) \alpha_3(t_3, \\ &t_4, t_5)\}_s + 2 \cdot 15\{\alpha_1(t_1) \alpha_2(t_2, t_3) \alpha_2(t_4, t_5)\}_s - \end{aligned}$$

$$- 6 \cdot 10 \{ \alpha_1(t_1) \alpha_1(t_2) \alpha_1(t_3) \alpha_2(t_4, t_5) \}_s + \\ + 24 \alpha_1(t_1) \alpha_1(t_2) \alpha_1(t_3) \alpha_1(t_4) \alpha_1(t_5). \quad (6.2.9)$$

Первые пять моментных функций представляются через кумулянтные следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_1) &= \kappa_1(t_1), \\ \alpha_2(t_1, t_2) &= \kappa_2(t_1, t_2) + \kappa_1(t_1) \kappa_1(t_2), \\ \alpha_3(t_1, t_2, t_3) &= \kappa_3(t_1, t_2, t_3) + 3\{\kappa_1(t_1) \times \\ &\times \kappa_2(t_2, t_3)\}_s + \kappa_1(t_1) \kappa_1(t_2) \kappa_1(t_3), \\ \alpha_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \kappa_4(t_1, t_2, t_3, t_4) + \\ &+ 3\{\kappa_2(t_1, t_2) \kappa_2(t_3, t_4)\}_s + \\ &+ 4\{\kappa_1(t_1) \kappa_3(t_2, t_3, t_4)\}_s + 6\{\kappa_1(t_1) \kappa_1(t_2) \kappa_2(t_3, t_4)\}_s + \\ &+ \kappa_1(t_1) \kappa_1(t_2) \kappa_1(t_3) \kappa_1(t_4), \\ \alpha_5(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) &= \kappa_5(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) + \\ &+ 5\{\kappa_1(t_1) \kappa_4(t_2, t_3, t_4, t_5)\}_s + \\ &+ 10\{\kappa_2(t_1, t_2) \kappa_3(t_3, t_4, t_5)\}_s + \\ &+ 10\{\kappa_1(t_1) \kappa_1(t_2) \kappa_3(t_3, t_4, t_5)\}_s + 15\{\kappa_1(t_1) \kappa_2(t_2, t_3) \times \\ &\times \kappa_2(t_4, t_5)\}_s + 10\{\kappa_1(t_1) \kappa_1(t_2) \kappa_1(t_3) \kappa_2(t_4, t_5)\}_s + \\ &+ \kappa_1(t_1) \kappa_1(t_2) \kappa_1(t_3) \kappa_1(t_4) \kappa_1(t_5). \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Если теперь в (6.2.9), (6.2.10) приравнять все моменты времени, то эти формулы перейдут в формулы (1.2.4), (1.2.5), связывающие между собой моменты и кумулянты, которые теперь будут зависеть от времени, ибо это будут моменты и кумулянты случайного процесса.

4. Для первых двух моментных и кумулянтных функций случайного процесса $\xi(t)$ введем специальные обозначения и названия:

$$\begin{aligned} \kappa_1^\xi(t) &= \alpha_1^\xi(t) \equiv m_\xi(t) && \text{— среднее значение случайного} \\ &&& \text{процесса,} \\ \kappa_2^\xi(t_1, t_2) &\equiv B_\xi[t_1, t_2] && \text{— ковариационная функция слу-} \\ &&& \text{чайного процесса,} \\ \alpha_2^\xi(t_1, t_2) &\equiv K_\xi[t_1, t_2] && \text{— корреляционная функция слу-} \\ &&& \text{чайного процесса,} \\ \kappa_2^\xi(t, t) &= B_\xi[t, t] \equiv D_\xi(t) \equiv \sigma_\xi^2(t) && \text{— дисперсия случай-} \\ &&& \text{ного процесса.} \end{aligned}$$

Между этими функциями существуют очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} K_\xi[t_1, t_2] &= B_\xi[t_1, t_2] + m_\xi(t_1) m_\xi(t_2), \\ K_\xi[t, t] &= D_\xi(t) + m_\xi^2(t). \end{aligned}$$

Введем специальное название и для кумулянтной функции четвертого порядка:

функций случайного процесса. Основную особенность этих зависимостей мы сейчас и рассмотрим.

2. Одномоментное распределение случайного процесса $W(x, t)$ определяется кумулянтами $\kappa_s(t)$. Поэтому вся специфика случайного процесса сказывается здесь в характере зависимости кумулянтов от времени. Насколько кумулянтны случайной величины могут быть произвольными (см. § 2.6), настолько разные кумулянты могут различным образом зависеть от времени.

В частном случае кумулянты случайного процесса могут вообще не зависеть от времени. Тогда одномерная плотность вероятности случайного процесса уже ничем не будет отличаться от плотности вероятности случайной величины. Эта ситуация имеет место, например, для стационарных случайных процессов (см. ниже гл. 7). Таким образом, одномоментное распределение в некоторых случаях может вообще не отразить специфику случайного процесса.

3. Обратимся к двумоментному распределению случайного процесса $W(x_1, t_1; x_2, t_2)$. Это распределение представляется кумулянтными функциями

первого порядка:

$$\kappa_1(t_1), \kappa_1(t_2);$$

второго порядка:

$$\kappa_2(t_1, t_1), \kappa_2(t_1, t_2), \kappa_2(t_2, t_2);$$

третьего порядка:

$$\kappa_3(t_1, t_1, t_1), \kappa_3(t_1, t_1, t_2), \kappa_3(t_1, t_2, t_2), \kappa_3(t_2, t_2, t_2)$$

.....

s-го порядка:

$$\kappa_s(t_1^{[s]}), \kappa_s(t_1^{[s-1]}, t_2), \dots, \kappa_s(t_1, t_2^{[s-1]}), \kappa_s(t_2^{[s]}).$$

Исключив отсюда кумулянтные функции одномоментного распределения, получим набор кумулянтных функций, характерных именно для случайного процесса:

$$\begin{aligned} & \kappa_2(t_1, t_2) \\ & \kappa_3(t_1, t_2^{[2]}), \quad \kappa_3(t_1^{[2]}, t_2) \\ & \kappa_4(t_1, t_2^{[3]}), \quad \kappa_4(t_1^{[2]}, t_2^{[2]}), \quad \kappa_4(t_1^{[3]}, t_2) \\ & \dots \\ & \kappa_s(t_1, t_2^{[s-1]}), \kappa_s(t_1^{[2]}, t_2^{[s-2]}), \dots, \kappa_s(t_1^{[s-1]}, t_2), \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Согласно статистическому смыслу кумулянтных функций полный набор (6.3.1) описывает все степени статистической связи значений случайного процесса, взятых в моменты $t = t_1$ и $t = t_2$.

Если t_1 и t_2 таковы, что $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ статистически независимы, например, t_1 и t_2 очень далеки друг от друга, то $\kappa_s(t_1^{[k]}, t_2^{[s-k]}) \equiv 0$. С другой стороны, при $t_1 = t_2 = t$ кумулянтные функции (6.3.1) переходят в кумулянты одномоментного распределения,

рассматриваемого в момент t , и в общем случае все они отличны от нуля. Тем самым, можно ввести *время статистической зависимости* случайного процесса $\Theta = \Theta(t_1)$, определив его так, чтобы при $|t_2 - t_1| \gg \Theta$ можно было полагать, что для всех $s = 2, 3, \dots$, $k = 1, 2, \dots, s - 1$

$$\kappa_s(t_1^{[k]}, t_2^{[s-k]}) \equiv 0.$$

Совершенно ясно, что каждой кумулянтной функции из набора (6.3.1) соответствуют свои $\Theta_s = \Theta_s(t_1)$. Величины Θ_s являются *временами статистической зависимости* $(s - 1)$ -го порядка. Они определяют интервалы, на которых исчезает статистическая связь того же порядка, и в общем случае все различны. Поэтому за время статистической зависимости случайного процесса в целом можно принять $\Theta = \max \{\Theta_s\}$.

Интервал $\Theta_2(t_1) \equiv \tau_{\text{кор}}(t_1)$, соответствующий ковариационной функции $B[t_1, t_2]$, называется *временем корреляции* случайного процесса. На этом времени исчезает линейная статистическая связь значений случайного процесса $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$.

При количественном определении Θ_s удобнее оперировать, конечно, с нормированными кумулянтными функциями (6.2.11). Для двумomentного распределения случайного процесса они принимают вид

$$\gamma_s(t_1^{[k]}, t_2^{[s-k]}) = \frac{\kappa_s(t_1^{[k]}, t_2^{[s-k]})}{\sigma^k(t_1) \sigma^{s-k}(t_2)} \quad (6.3.2)$$

и при возрастании $|t_2 - t_1|$ изменяются от значения, равного $\gamma_s(t_1)$, до нуля. За время статистической зависимости Θ_s можно, например, принять такой интервал $|t_2 - t_1|$, на котором (6.3.2) становится равной $(1/2) \gamma_s(t_1)$.

4. Для кумулянтных функций $\kappa_s(t_1, t_2, \dots, t_s)$, соответствующих многомоментному представлению случайного процесса, также можно установить интервалы статистической зависимости. Таких интервалов для каждой кумулянтной функции будет всего $(s - 1)$, и при этом все они могут быть различными. Примеры количественного определения этих интервалов мы приведем ниже при рассмотрении стационарных случайных процессов.

6.4. Гауссов случайный процесс

1. *Гауссовым* случайным процессом называется такой процесс, кумулянтные функции которого, начиная с третьего порядка, тождественно равны нулю:

$$\kappa_3(t_1, t_2, t_3) \equiv \kappa_4(t_1, t_2, t_3, t_4) \equiv \dots \equiv \kappa_s(t_1, \dots, t_s) \equiv 0.$$

Таким образом, гауссов процесс однозначно определяется средним значением $m(t)$ и ковариационной функцией $B[t_1, t_2]$.

Одномоментная и двумоментная плотности вероятности гауссова случайного процесса равна [см. (3.1.5), (1.5.2)]

$$W_r(x, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}} \exp \left\{ -\frac{[x - m(t)]^2}{2D(t)} \right\},$$

$$W_r(x_1, t_1; x_2, t_2) \equiv \frac{1}{2\pi \sqrt{D(t_1)D(t_2) - B^2[t_1, t_2]}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{D(t_2)[x_1 - m(t_1)]^2 - 2B[t_1, t_2][x - m(t_1)][x - m(t_2)] + D(t_1)[x - m(t_2)]^2}{2[D(t_1)D(t_2) - B^2[t_1, t_2]]} \right\}.$$

2. Если среднее значение гауссова случайного процесса равно нулю, то его моментные функции принимают вид

$$\alpha_{2s+1}(t_1, t_2, \dots, t_{2s+1}) \equiv 0,$$

$$\alpha_4(t_1, \dots, t_4) = 3\{B[t_1, t_2]B[t_3, t_4]\}_s,$$

$$\alpha_6(t_1, \dots, t_6) = 15\{B[t_1, t_2]B[t_3, t_4]B[t_5, t_6]\}_s,$$

$$\dots$$

$$\alpha_{2k}(t_1, \dots, t_{2k}) = (2k - 1)!! \{B[t_1, t_2] \cdot \dots$$

$$\dots \cdot B[t_{2k-1}, t_{2k}]\}_s.$$

6.5. Совокупность случайных процессов

1. Рассмотрим совокупность двух случайных процессов $\{\xi(t), \eta(t)\}$. Совместную $2N$ -моментную плотность вероятности этой совокупности запишем в виде

$$W_{\xi\eta}(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N; y_1, t'_1; \dots; y_N, t'_N),$$

где $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_N, t'_1 \leq t'_2 \leq t'_3 \leq \dots \leq t'_N$.

Основной интерес, возникающий при рассмотрении совокупности случайных процессов, относится к вопросам их взаимосвязи. Если плотность вероятности распадается на произведение

$$W_{\xi\eta}(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N; y_1, t'_1; \dots; y_N, t'_N) = W_{\xi}(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N) W_{\eta}(y_1, t'_1; \dots; y_N, t'_N)$$

для любых N, t_i и t'_j , то говорят, что случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ *статистически независимы*. В противном случае между процессами имеется какая-либо статистическая связь.

2. Характеристическая функция совокупности двух случайных процессов

$$\Theta_{\xi\eta}(u_1, t_1; \dots; u_N, t_N; v_1, t'_1; \dots; v_N, t'_N) \equiv$$

$$\equiv \langle \exp \{j[u_1 \xi(t_1) + \dots + u_N \xi(t_N) + v_1 \eta(t'_1) + \dots + v_N \eta(t'_N)]\} \rangle,$$

как и ее логарифм, может быть разложена в степенные ряды по $j\mu_k$ и $j\nu_k$. Коэффициенты этих рядов определяются моментными и кумулянтными функциями совокупности.

Для совместных кумулянтных функций введем четырехиндексное обозначение $\kappa_{p,s}^{\xi,\eta}$. Первый нижний индекс относится к первому верхнему индексу и показывает число моментов времени первого случайного процесса. Второй нижний индекс соответствует второму процессу. Сумма $p + s$ определяет порядок кумулянтной функции.

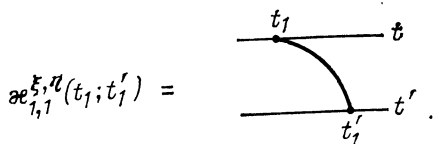
Согласно (1.6.2) кумулянтные функции совокупности двух случайных процессов равны

$$\begin{aligned} & \kappa_{p,s}^{\xi,\eta}(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_p}; t'_{\mu_1}, t'_{\mu_2}, \dots, t'_{\mu_s}) \equiv \\ & \equiv \langle \xi(t_{\lambda_1}), \xi(t_{\lambda_2}), \dots, \xi(t_{\lambda_p}); \eta(t'_{\mu_1}), \eta(t'_{\mu_2}), \dots, \eta(t'_{\mu_s}) \rangle \equiv \\ & \equiv (-j)^{p+s} \left[\frac{\partial^{p+s} \ln \Theta_{\xi\eta}(u_1 t_1; \dots; u_N t_N; v_1 t'_1; \dots; v_N t'_N)}{\partial u_{\lambda_1} \dots \partial u_{\lambda_p} \partial v_{\mu_1} \dots \partial v_{\mu_s}} \right]_{\substack{u_i=0 \\ v_i=0}}, \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

где $p + s = 1, 2, 3, \dots$; $\lambda_i, \mu_j = \overline{1, N}$. Условимся, что первая группа моментов времени в аргументе кумулянтной функции всегда будет относиться к первому верхнему индексу — первому случайному процессу, вторая — ко второму индексу. Штрих у моментов времени второго случайного процесса в последующем часто будем опускать.

Если случайные процессы статистически независимы, то все совместные кумулянтные функции обращаются в нуль, и, наоборот, если все $\kappa_{p,s}^{\xi,\eta} \equiv 0$ ($p > 0, s > 0$), то случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ статистически независимы. Поэтому степень статистической связи двух случайных процессов определяется отличными от тождественного нуля совместными кумулянтными функциями.

Совместная кумулянтная функция второго порядка одна: $\kappa_{1,1}^{\xi,\eta}(t_1; t'_1)$. Она описывает линейную статистическую связь, существующую между $\xi(t)$ и $\eta(t')$. Ее диаграмма имеет следующий вид:



Совместных кумулянтных функций, соответствующих статистическим связям второго порядка между $\xi(t)$ и $\eta(t')$, две:

$$\kappa_{2,1}^{\xi,\eta}(t_1, t_2; t'_1), \kappa_{1,2}^{\xi,\eta}(t_1; t'_1, t'_2).$$

Их диаграммы таковы:

$$\alpha_{2,1}^{\xi,\eta}(t_1, t_2; t'_1) = \begin{array}{c} t_1 \quad t_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \\ t'_1 \end{array}, \quad \alpha_{1,2}^{\xi,\eta}(t_1; t'_1, t'_2) = \begin{array}{c} t_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \\ t'_1 \quad t'_2 \end{array}.$$

Приведем также диаграммное изображение трех совместных кумулянтных функций четвертого порядка, представляющих связи третьего порядка:

$$\begin{aligned} \alpha_{3,1}^{\xi,\eta}(t_1, t_2, t_3; t'_1) &= \begin{array}{c} t \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \\ t' \end{array} \\ \alpha_{2,2}^{\xi,\eta}(t_1, t_2; t'_1, t'_2) &= \begin{array}{c} t \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \\ t' \end{array} \\ \alpha_{1,3}^{\xi,\eta}(t_1; t'_1, t'_2, t'_3) &= \begin{array}{c} t \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \\ t' \end{array}. \end{aligned}$$

Отличительным признаком подобных диаграмм любых совместных кумулянтных функций служит наличие хотя бы одной связи между верхней и нижней линиями, т. е. между случайными процессами $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Будем называть такие связи вертикальными.

3. Аналогично (6.5.1) определяются и моментные функции совокупности двух случайных процессов:

$$\begin{aligned} \alpha_{p,s}^{\xi,\eta}(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_p}; t'_{\mu_1}, t'_{\mu_2}, \dots, t'_{\mu_s}) &\equiv \\ &\equiv \langle \xi(t_{\lambda_1}) \xi(t_{\lambda_2}) \dots \xi(t_{\lambda_p}) \eta(t'_{\mu_1}) \eta(t'_{\mu_2}) \dots \eta(t'_{\mu_s}) \rangle \equiv \\ &\equiv (-j)^{p+s} \left[\frac{\partial^{p+s} \Theta_{\xi\eta}(u_1, t_1; \dots; u_N, t_N; v_1, t'_1; \dots; v_N, t'_N)}{\partial u_{\lambda_1} \partial u_{\lambda_2} \dots \partial u_{\lambda_p} \partial v_{\mu_1} \partial v_{\mu_2} \dots \partial v_{\mu_s}} \right]_{\substack{u_i=0 \\ v_i=0}}. \end{aligned}$$

Если и p , и s отличны от нуля, то мы также имеем дело с *совместными* моментными функциями.

С помощью кумулянтных диаграмм нетрудно выразить совместные моментные функции через кумулянтные. Например, из легко получаемой диаграммы

$$\begin{aligned} \alpha_{2,2}^{\xi,\eta} = & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \\ & + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \\ & + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \bullet \end{array} \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_{2,2}^{\xi,\eta}(\Theta_1, \Theta_2; \Theta_3, \Theta_4) &= \kappa_{2,2}^{\xi,\eta}(\Theta_1, \Theta_2; \Theta_3, \Theta_4) + \\ &+ 4 \{ \kappa(\Theta_1) \kappa(\Theta_2; \Theta_3, \Theta_4) \}_s + \\ &+ 3 \{ \kappa(\Theta_1, \Theta_2) \kappa(\Theta_3, \Theta_4) \}_s + 6 \{ \kappa(\Theta_1) \kappa(\Theta_2) \kappa(\Theta_3, \Theta_4) \}_s + \\ &+ \kappa_1^{\xi}(\Theta_1) \kappa_1^{\xi}(\Theta_2) \kappa_1^{\eta}(\Theta_3) \kappa_1^{\eta}(\Theta_4). \end{aligned}$$

Симметризация идет здесь по моментам $\Theta_1 = t_1$, $\Theta_2 = t_2$, $\Theta_3 = t'_1$, $\Theta_4 = t'_2$, а в зависимости от них пишутся уже и индексы. Из этой же диаграммы с очевидностью следует, что если процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ статистически независимы, то слагаемых с вертикальными связями не будет и предыдущая диаграмма переходит в

$$\alpha_{2,2}^{\xi,\eta} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \times \\ \times \times \end{array}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \alpha_{2,2}^{\xi,\eta}(t_1, t_2; t_3, t_4) &= \kappa_2^{\xi}(t_1, t_2) \kappa_2^{\eta}(t_3, t_4) + \\ &+ \kappa_2^{\xi}(t_1, t_2) \kappa_1^{\eta}(t_3) \kappa_1^{\eta}(t_4) + \kappa_2^{\eta}(t_3, t_4) \kappa_1^{\xi}(t_1) \kappa_1^{\xi}(t_2) + \\ &+ \kappa_1^{\xi}(t_1) \kappa_1^{\xi}(t_2) \kappa_1^{\eta}(t_3) \kappa_1^{\eta}(t_4) = \alpha_2^{\xi}(t_1, t_2) \alpha_2^{\eta}(t_3, t_4), \end{aligned}$$

что и должно быть на основании второй формулы (6.2.10).

4. Совместная кумулянтная функция второго порядка

$$\kappa_{1,1}^{\xi,\eta}(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1), \xi(t_2) \rangle \equiv B_{\xi\eta}[t_1, t_2] \quad (6.5.2)$$

называется *совместной ковариационной функцией* случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Совместная моментная функция второго порядка

$$\alpha_{1,1}^{\xi,\eta}(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1) \eta(t_2) \rangle \equiv K_{\xi\eta}[t_1, t_2]$$

называется *совместной корреляционной функцией*. Между этими функциями существует очевидная взаимосвязь:

$$K_{\xi\eta}[t_1, t_2] = B_{\xi\eta}[t_1, t_2] + m_{\xi}(t_1) m_{\eta}(t_2). \quad (6.5.3)$$

Заметим, что первый аргумент введенных функций всегда будет относиться к первому индексу, а второй аргумент — ко второму индексу. Ясно, что

$$B_{\eta\xi}[t_2, t_1] = B_{\xi\eta}[t_1, t_2], K_{\eta\xi}[t_2, t_1] = K_{\xi\eta}[t_1, t_2].$$

Случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются *некоррелированными*, если для всех t_1 и t_2 совместная ковариационная функция равна нулю. В противном случае процессы считаются коррелированными.

5. Для совокупности N случайных процессов $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)\}$ также, в принципе, несложно определить и построить бесконечный набор кумулянтных функций, представляющих данную совокупность. Вместе с этим основное значение для такой со-

вокупности будут иметь кумулянтные функции первого и второго порядков $m_{\xi_i}(t)$, $B_{\xi_i \xi_j}[t, t']$, которое удобно представить вектором (столбцом) средних значений и ковариационной матрицей

$$\mathbf{m}_{\xi}(t) \equiv \langle \xi(t) \rangle, \quad \mathbf{B}_{\xi}[t, t'] \equiv \langle \xi(t), \xi^+(t') \rangle.$$

Полезно также ввести *корреляционную* матрицу случайного векторного процесса $\xi(t)$:

$$\mathbf{K}_{\xi}[t, t'] \equiv \langle \xi(t) \xi^+(t') \rangle = \mathbf{B}_{\xi}[t, t'] + \mathbf{m}_{\xi}(t) \mathbf{m}_{\xi}^+(t'), \quad (6.5.4)$$

обладающую компонентами $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle$. Ковариационная и корреляционная матрицы имеют следующее важное свойство:

$$\mathbf{B}_{\xi}[t', t] = \mathbf{B}_{\xi}^+[t, t'], \mathbf{K}_{\xi}[t', t] = \mathbf{K}_{\xi}^+[t, t']. \quad (6.5.5)$$

Глава 7

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

7.1. Особенности стационарного процесса

1. Случайный процесс называется *стационарным*, если его плотность вероятности $W(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N)$ не изменяется при замене последовательности $t_1, t_2, \dots, t_N$ на $t_1 + \vartheta, t_2 + \vartheta, \dots, t_N + \vartheta$ при любом временном сдвиге ϑ . Плотность вероятности стационарного случайного процесса зависит лишь от разности моментов времени, например от $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_N - t_1$. Введем обозначение $\tau_k \equiv t_k - t_1$.

Кумулянтные функции стационарного случайного процесса также зависят лишь от разностей моментов времени:

$$\begin{aligned} \kappa_1(t) &= \kappa_1(0) = \text{const}, \\ \kappa_2(t_1, t_2) &= \kappa_2(0, \tau_2), \\ \kappa_3(t_1, t_2, t_3) &= \kappa_3(0, \tau_2, \tau_3), \\ &\vdots \\ \kappa_s(t_1, t_2, \dots, t_s) &= \kappa_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s). \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

2. В кумулянтные функции двумоментного распределения стационарного случайного процесса входит только одна переменная $\tau = t_2 - t_1$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \kappa_2(0, \tau) & & \\ & & \downarrow & & \\ & \kappa_3(0, 0, \tau), & & \kappa_3(0, \tau, \tau) & \\ \kappa_1(0, 0, 0, \tau), & & \kappa_4(0, 0, \tau, \tau), & & \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$\kappa_s(0^{[s-1]}, \tau), \kappa_s(0^{[s-2]}, \tau, \tau), \dots, \kappa_s(0, 0, \tau^{[s-2]}), \kappa_s(0, \tau^{[s-1]}), \quad (7.1.2)$$

Кумулянтных функций s -го порядка всего $s - 1$, и в общем случае все они *различны*.

Сюда, разумеется, нужно добавить и кумулянтные функции вида

$$\begin{aligned} \kappa_1(0) &= \kappa_1(\tau) = m = \text{const}, \\ \kappa_2(0, 0) &= \kappa_2(\tau, \tau) = D = \text{const}, \\ \kappa_s(0^{[s]}) &= \kappa_s(\tau^{[s]}) = \text{const}, \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

которые представляют кумулянты одномоментного распределения.

Обращаясь к трехмоментному распределению случайного стационарного процесса, найдем, что его кумулянтные функции (7.1.1) складываются из одномоментных функций (7.1.3), из двумоментных функций (7.1.2), где $\tau = \tau_2, \tau_3, \tau_{32} = \tau_3 - \tau_2$, и собственно трехмоментных кумулянтных функций

$$\begin{aligned} &\kappa_3(0, \tau_2, \tau_3) \\ &\kappa_4(0, 0, \tau_2, \tau_3), \quad \kappa_4(0, \tau_2, \tau_2, \tau_3), \quad \kappa_4(0, \tau_2, \tau_3, \tau_3) \\ &\kappa_5(0^{[3]}, \tau_2, \tau_3), \kappa_5(0^{[2]}, \tau_2^{[2]}, \tau_3), \dots, \kappa_5(0, \tau_2^{[2]}, \tau_3^{[2]}), \kappa_5(0, \tau_2, \tau_3^{[3]}) \\ &\dots \end{aligned}$$

Таких кумулянтных функций s -го порядка всего C_{s-1}^2 , и все они в общем случае также различны.

По индукции легко доказать, что собственных k -моментных кумулянтных функций s -го порядка будет всего C_{s-1}^{k-1} штук. Все сказанное справедливо и для моментных функций стационарного случайного процесса $\alpha_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)$.

Нормированные кумулянтные функции (6.2.11) для стационарного случайного процесса примут вид

$$\gamma_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) \equiv \kappa_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) D^{-s/2}. \quad (7.1.4)$$

При $\tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau_s = 0$ (7.1.4) представляет кумулянтные коэффициенты стационарного процесса.

3. Если при анализе многомоментных распределений стационарного случайного процесса ограничиться рассмотрением только кумулянтных функций не выше второго порядка, то главное, что характеризует стационарность процесса, — это постоянство среднего и дисперсии и зависимость ковариационной функции только от разности моментов времени:

$$m = \text{const}, \quad D = B[0] = \text{const}, \quad B[t_1, t_2] \equiv B[t_2 - t_1]. \quad (7.1.5)$$

В связи с этим помимо приведенного выше определения стационарности, которая часто называется *стационарностью в узком смысле*, существует понятие случайного процесса, *стационарного в широком смысле* (см., например, [37]). Эта стационарность опре-

деляется условиями (7.1.5), в то время как о временной зависимости высших кумулянтных функций ничего не говорится.

Для последующего изложения мы используем более краткую терминологию и стационарность в узком смысле будем называть *сильной* стационарностью, а стационарность в широком смысле — *слабой* стационарностью [38, 39].

Таким образом, если оставаться в рамках спектрально-корреляционной теории случайных процессов, для которой необходимо знание лишь низших кумулянтных функций, то достаточно ограничиться рассмотрением только слабо стационарных случайных процессов.

Практическая важность понятия слабой стационарности видна и из того, что для гауссова стационарного случайного процесса понятия слабой и сильной стационарности совпадают, поскольку его кумулянтные функции высших порядков вообще тождественно равны нулю. Таким образом, имея дело с гауссовыми случайными процессами, можно говорить о стационарности вообще, не оговаривая это понятие более точно.

4. Введенные термины «сильно» и «слабо» могут быть отнесены не только к понятию стационарности, но также и к другим характеристикам случайного процесса. Это обстоятельство связано со следующим общим принципом. Если какое-либо утверждение или определение строится только на использовании первых двух кумулянтных функций, то ему приписывается термин «слабо». Если же те же самые утверждения или определения формулируются в терминах всех кумулянтных функций — им приписывается термин «сильно».

Поскольку для гауссовых случайных процессов оба этих термина становятся тождественными, то из «слабых» утверждений для любых случайных процессов в дополнительном предположении об их гауссовости всегда вытекает много больше, а именно, вытекают «сильные» утверждения. Хорошей иллюстрацией этого является то, что понятие некоррелированности переходит для гауссовых процессов в понятие статистической независимости. В этом смысле некоррелированность может пониматься просто как слабая статистическая независимость, и если вспомнить о статистическом смысле кумулянтных функций, то подобная интерпретация окажется весьма естественной.

5. В заключение настоящего параграфа приведем ряд формул, связывающих моментные и кумулянтные функции стационарного случайного процесса. Этими формулами мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Общие выражения α_s через κ_s , легко получаемые из (2.2.2), имеют следующий вид ($\tau_{kl} \equiv t_k - t_l = \tau_k - \tau_l$):

$$\alpha_1 = \kappa_1 = \text{const},$$

$$\alpha_2(0, \tau) = \kappa_2(0, \tau) + \kappa_1^2,$$

$$\alpha_3(0, \tau_2, \tau_3) = \kappa_3(0, \tau_2, \tau_3) + \kappa_1[\kappa_2(0, \tau_{32}) +$$

$$\begin{aligned}
\kappa_4(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = & \alpha_4(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4) - \alpha_1[\alpha_3(0, \tau_{32}, \tau_{42}) + \\
& + \alpha_3(0, \tau_3, \tau_4) + \alpha_3(0, \tau_2, \tau_4) + \alpha_3(0, \tau_2, \tau_3)] - \\
& - \alpha_2(0, \tau_2) \alpha_2(0, \tau_{43}) - \alpha_2(0, \tau_3) \alpha_2(0, \tau_{42}) - \\
& - \alpha_2(0, \tau_4) \alpha_2(0, \tau_{32}) + 2 \alpha_1^2 [\alpha_2(0, \tau_2) + \alpha_2(0, \tau_3) + \\
& + \alpha_2(0, \tau_4) + \alpha_2(0, \tau_{32}) + \alpha_2(0, \tau_{42}) + \alpha_2(0, \tau_{43})] - 6 \alpha_1^4.
\end{aligned}
\tag{7.1.7}$$

7.2. Свойства кумулянтных функций

1. Из инвариантности кумулянтных функций стационарного случайного процесса к началу отсчета времени и к любым перестановкам аргументов можно получить некоторые общие свойства их симметрии.

Так, например, легко обнаружить четность ковариационной функции

$$\kappa_2(0, -\tau_2) = \kappa_2(t_2, t_1) = \kappa_2(t_1, t_2) = \kappa_2(0, \tau_2). \tag{7.2.1}$$

Аналогично можно найти, что

$$\kappa_3(0, \tau_2, \tau_3) = \kappa_3(0, -\tau_2, \tau_3 - \tau_2) = \kappa_3(0, \tau_2 - \tau_3, -\tau_3). \tag{7.2.2}$$

Отсюда получаем, в частности,

$$\begin{aligned}
\kappa_3(0, -\tau_2, \tau_3) &= \kappa_3(0, \tau_2, \tau_2 + \tau_3) = \kappa_3(0, -\tau_2 - \tau_3, -\tau_3), \\
\kappa_3(0, \tau_2, -\tau_3) &= \kappa_3(0, \tau_2 + \tau_3, \tau_3) = \\
&= \kappa_3(0, -\tau_2, -\tau_2 - \tau_3), \\
\kappa_3(0, -\tau_2, -\tau_3) &= \kappa_3(0, \tau_2, \tau_2 - \tau_3) = \kappa_3(0, \tau_3 - \tau_2, \tau_3).
\end{aligned}
\tag{7.2.3}$$

Меняя начало отсчета времени для аргументов четвертой кумулянтной функции, найдем

$$\begin{aligned}
\kappa_4(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &= \kappa_4(0, -\tau_2, \tau_3 - \tau_2, \tau_4 - \tau_2) = \\
&= \kappa_4(0, -\tau_3, \tau_2 - \tau_3, \tau_4 - \tau_3) = \kappa_4(0, -\tau_4, \tau_2 - \tau_4, \tau_3 - \tau_4).
\end{aligned}
\tag{7.2.4}$$

Эти равенства приведут нас, например, к

$$\begin{aligned}
\kappa_4(0, -\tau_2, \tau_3, \tau_4) &= \kappa_4(0, \tau_2, \tau_3 + \tau_2, \tau_4 + \tau_2), \\
\kappa_4(0, -\tau_2, -\tau_3, \tau_4) &= \kappa_4(0, \tau_3, \tau_3 - \tau_2, \tau_4 + \tau_3), \\
\kappa_4(0, -\tau_2, -\tau_3, -\tau_4) &= \kappa_4(0, \tau_4, \tau_4 - \tau_2, \tau_4 - \tau_3).
\end{aligned}
\tag{7.2.5}$$

Соотношения, аналогичные (7.2.3) и (7.2.5), могут быть элементарным образом получены и для кумулянтных функций высших

порядков из следующей общей формулы:

$$\begin{aligned}\kappa_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= \kappa_s(0, -\tau_2, \tau_3 - \tau_2, \dots, \tau_s - \tau_2) = \\ &= \kappa_s(0, \tau_2 - \tau_3, -\tau_3, \tau_4 - \tau_3, \dots, \tau_s - \tau_3) = \\ &= \dots = \kappa_s(0, \tau_2 - \tau_s, \tau_3 - \tau_s, \dots, \tau_{s-1} - \tau_s, -\tau_s). \quad (7.2.6)\end{aligned}$$

2. Выше мы указывали, что кумулянтные функции $\kappa_s(0^{[p]}, \tau^{[s-p]})$ в общем случае различны для разных p . Однако это различие относительно, поскольку кумулянтные функции одного порядка в определенной степени связаны приведенными соотношениями симметрии. В самом деле, из (7.2.2), (7.2.4) следует, например, что

$$\begin{aligned}\kappa_3(0, \tau, \tau) &= \kappa_3(0, 0, -\tau), \\ \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau) &= \kappa_4(0, 0, 0, -\tau), \\ \kappa_4(0, 0, \tau, \tau) &= \kappa_4(0, 0, -\tau, -\tau).\end{aligned} \quad (7.2.7)$$

Условия симметрии (7.2.6) приводят к

$$\begin{aligned}\kappa_{p+q}(0^{[p]}, \tau^{[q]}) &= \kappa_{p+q}(0^{[q]}, -\tau^{[p]}), \\ \kappa_{p+q}(0^{[p]}, -\tau^{[q]}) &= \kappa_{p+q}(0^{[q]}, \tau^{[p]}).\end{aligned} \quad (7.2.8)$$

По этой причине всякая кумулянтная функция $\kappa_{p+q}(0^{[p]}, \tau^{[q]})$, у которой $p = q$, является четной функцией τ , а при произвольных p и q четной будет сумма

$$\kappa_{p+q}(0^{[p]}, \tau^{[q]}) + \kappa_{q+p}(0^{[q]}, \tau^{[p]}). \quad (7.2.9)$$

В заключение параграфа заметим, что все полученные здесь формулы справедливы и для моментных функций $\alpha_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)$.

7.3. Времена статистической зависимости

1. В § 6.3 мы ввели интервалы статистической зависимости случайного процесса. Для стационарного процесса эти понятия могут быть определены более конкретно, и им может быть придан количественный характер.

Нормированные кумулянтные функции стационарного процесса $\gamma_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)$, согласно (7.1.4), пропорциональны кумулянтным функциям и поэтому обладают всеми их свойствами. Так, прежде всего, имеет место симметричность по отношению ко всем τ_k :

$$\begin{aligned}\gamma_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= \gamma_s(0, \tau_3, \tau_2, \dots, \tau_s) = \\ &= \gamma_s(0, \tau_s, \tau_3, \dots, \tau_2) = \dots\end{aligned} \quad (7.3.1)$$

и соотношения, вытекающие из (7.2.6),

$$\begin{aligned}\gamma_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= \gamma_s(0, -\tau_2, \tau_3 - \tau_2, \dots, \tau_s - \tau_2) = \\ &= \gamma_s(0, -\tau_3, \tau_2 - \tau_3, \dots, \tau_s - \tau_3) = \dots = \\ &= \gamma_s(0, -\tau_s, \tau_2 - \tau_s, \dots, \tau_{s-1} - \tau_s).\end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Эти формулы устанавливают определенные свойства симметрии замкнутой поверхности

$$\gamma_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = c_s = \text{const} \quad (7.3.3)$$

в $(s-1)$ -мерном декартовом T -пространстве с координатными осями $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s$. Назовем поверхность (7.3.3) *изоковариантой* $(s-1)$ -го порядка случайного стационарного процесса.

Нормированные кумулянтные функции описывают меру статистической связи между значениями случайного процесса, взятыми в точках $t, t + \tau_2, t + \tau_3, \dots, t + \tau_s$, поэтому изоковарианты представляют такое множество значений $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s$, на котором величина статистической связи $(s-1)$ -го порядка постоянна и равна c_s . Семейство изоковариант, соответствующее различным значениям c_s , является семейством поверхностей, разной по величине статистической связи.

Как следует из (7.3.1), все изоковарианты пересекают положительное направление координатных осей на равных расстояниях от начала координат и симметричны по отношению ко всем главным осям симметрии базиса пространства.

При $\tau_k \rightarrow \infty$ все $\gamma_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) \rightarrow 0$, что соответствует исчезновению статистической связи при раздвижении моментов времени $t + \tau_k$. Вместе с тем в T -пространстве существуют точки, в которых нормированная кумулянтная функция принимает максимальное значение $\gamma_s^{\max}$. Если такая точка одна, то нетрудно показать, что она совпадает с началом координат $\tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau_s = 0$. Заметим, что изоковарианты не обладают центральной симметрией [поверхностью (7.3.3) не может быть многомерная сфера], а их выделенные направления симметрии не совпадают с координатными осями. Если $\gamma_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)$ обладает одним максимумом, что мы далее и предположим, то времена статистической зависимости $(s-1)$ -го порядка $\Theta_{1s}, \Theta_{2s}, \dots, \Theta_{(s-1)s}$ могут быть определены например, как расстояния изоковарианты

$$\gamma_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \gamma_s^{\max}/e \quad (7.3.4)$$

от начала координат вдоль ее характерных направлений.

2. Для ковариационной функции $B[\tau] \equiv Dr[\tau]$, где $r(\tau) \equiv \gamma_2(0, \tau)$ — коэффициент корреляции случайного процесса, время статистической зависимости первого порядка есть время корреляции. На основании (7.3.4) оно находится из условия

$$r(\tau_{\text{кор}}) = e^{-1}. \quad (7.3.5)$$

Вместе с тем, время корреляции часто вводится интегральными соотношениями

$$\tau_{\text{кор}} \equiv \int_0^{\infty} r(\tau) d\tau, \quad (7.3.6)$$

$$\tau_{\text{кор}} \equiv \int_0^{\infty} r^2(\tau) d\tau. \quad (7.3.7)$$

Эти три определения дают, разумеется, несколько различные значения времени корреляции, однако порядок их величины одинаков.

3. Нормированная кумулянтная функция третьего порядка $\gamma_3(0, \tau_2, \tau_3)$ обладает двумя временами статистической зависимости второго порядка Θ_{13} и Θ_{23} . На основании (7.3.1), (7.3.2) она имеет следующие свойства:

$$\gamma_3(0, \tau_2, \tau_3) = \gamma_3(0, \tau_3, \tau_2),$$

$$\gamma_3(0, \tau_2, \tau_3) = \gamma_3(0, -\tau_2, \tau_3 - \tau_2) = \gamma_3(0, \tau_2 - \tau_3, -\tau_3).$$

Ее изоковариантами служат некоторые замкнутые кривые на плоскости τ_2, τ_3 , симметрично расположенные относительно главной

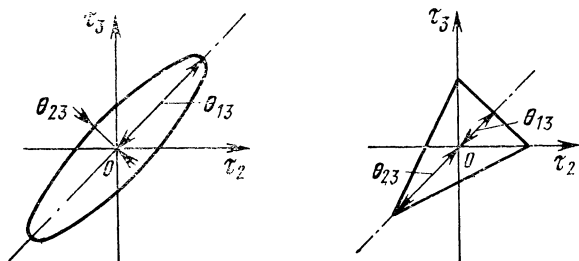


Рис. 7.1.

биссектрисы и пересекающие оси $+\tau_2, +\tau_3$ на равных расстояниях от начала координат так же, как и оси $-\tau_2, -\tau_3$ (но уже, в общем случае, на других равных расстояниях). Возможный вид изоковарианта изображен на рис. 7.1 для двух разных случаев.

В первом случае изоковарианта симметрична также и по отношению к неглавной биссектрисе, что имеет место при инвариантности $\gamma_3(0, \tau_2, \tau_3)$ к замене $\tau_2 \leftrightarrow -\tau_3$. Для этого случая Θ_{13} и Θ_{23} могут быть введены соотношениями

$$\gamma_3\left(0, \frac{\Theta_{13}}{\sqrt{2}}, \frac{\Theta_{13}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{e}, \quad \gamma_3\left(0, -\frac{\Theta_{23}}{\sqrt{2}}, \frac{\Theta_{23}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{e}. \quad (7.3.8)$$

Во втором случае возможный способ определения времен статистической зависимости связан с различной «скоростью уменьшения» статистической связи для положительных и отрицательных значений τ . Ему соответствует

$$\gamma_3\left(0, \frac{\Theta_{13}}{\sqrt{2}}, \frac{\Theta_{13}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{e}, \quad \gamma_3\left(0, -\frac{\Theta_{23}}{\sqrt{2}}, -\frac{\Theta_{23}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{e}.$$

7.4. Примеры кумулянтных функций негауссовых процессов

1. Рассмотрим теперь кумулянтные функции некоторых конкретных негауссовых стационарных случайных процессов. Начнем с ковариационной функции.

Пример 7.4.1. Одной из самых «популярных» ковариационных функций является

$$B[\tau] = Ae^{-a|\tau|}, \quad r(\tau) = e^{-a|\tau|}. \quad (7.4.1)$$

Время корреляции на основании (7.3.5) равно $\tau_{\text{кор}} = 1/a$. К этому же значению приводит нас и (7.3.6).

Пример 7.4.2. Если в предыдущем примере устремить $\tau_{\text{кор}}$ к бесконечности, то мы приходим к случайному процессу со сколь угодно большим временем корреляции — сколь угодно медленному случайному процессу, ковариационной функцией которого является постоянная величина $B[\tau] = A$.

Такая аппроксимация реального случайного процесса имеет смысл тогда, когда все характерные времена физической системы весьма малы по сравнению с временем корреляции случайного процесса, т. е. когда мы встречаемся с *квазистатическим воздействием* случайных процессов на те или иные системы.

Пример 7.4.3. Случайным процессом, в определенном смысле «обратным» предыдущему, является *дельта-коррелированный* случайный процесс, определенный тем, что его время корреляции сколь угодно мало: $\tau_{\text{кор}} = 0$. Для такого процесса значения $\xi(t)$ и $\xi(t + \tau)$ некоррелированы уже при любом сколь угодно малом $\tau \neq 0$. Если дисперсия такого случайного процесса конечна и равна A , то его функция ковариации получается из (7.4.1) в пределе при $a \rightarrow \infty$: $B_{\xi}[\tau] = A \uparrow(\tau)$. Здесь введена «игольчатая» функция

$$\uparrow(\tau) \equiv \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases}$$

Несравненно большее распространение получила модель дельта-коррелированного процесса с бесконечной дисперсией. Его ковариационная функция имеет вид

$$B_{\xi}[\tau] = \mathcal{D} \delta(\tau). \quad (7.4.2)$$

Чтобы перейти от (7.4.1) к (7.4.2), следует положить $A = \mathcal{D}a/2$ и устремить $a \rightarrow \infty$.

Представление какого-либо реального шума дельта-коррелированным случайным процессом имеет смысл тогда, когда время корреляции этого шума много меньше всех характерных времен системы, на которую он воздействует.

Если дельта-коррелированный процесс является в то же самое время гауссовым, то мы получаем *гауссов совершенно случайный процесс*, поскольку некоррелированность значений $\xi(t)$ и $\xi(t + \tau)$ для любых $\tau \neq 0$ ведет в этом случае к их статистической независимости.

Пример 7.4.4. Не менее часто используется ковариационная функция

$$B[\tau] = B[0] \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), & 0 \leq |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases} \equiv B[0] \Delta\left(\frac{\tau}{T}\right), \quad (7.4.3)$$

где через $\Delta(x)$ обозначена «треугольная» функция. За время корреляции удобно принять параметр T . Такой ковариационной функцией может обладать, например, так называемый телеграфный сигнал (см. ниже п. 5).

2. Рассмотрим процесс, образованный квадратичным преобразованием гауссова стационарного случайного процесса $\xi(t) \rightarrow \eta(t) = a \xi^2(t)$. Положим для простоты среднее значение процесса $\xi(t)$ равным нулю и будем считать заданной его ковариационную функцию $B[\tau]$. Для отыскания кумулянтных функций негауссова процесса $\eta(t)$

$$\kappa_s^\eta(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = a^s \langle \xi^2, \xi_{\tau_2}^2, \xi_{\tau_3}^2, \dots, \xi_{\tau_s}^2 \rangle,$$

где $\xi_{\tau_k} \equiv \xi(t + \tau_k)$, следует использовать формулы размыкания кумулянтных скобок вида $\langle x^2, y^2, \dots, \omega^2 \rangle$, некоторые из которых приведены в (II.17). В результате получим

$$\kappa_1^\eta = aB[0],$$

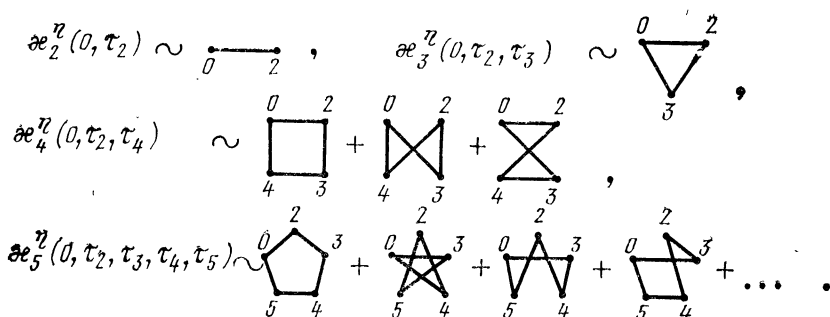
$$\kappa_2^\eta(0, \tau) = 2 a^2 B^2[\tau],$$

$$\kappa_3^\eta(0, \tau_2, \tau_3) = 8 a^3 B[\tau_2] B[\tau_3] B[\tau_3 - \tau_2],$$

$$\begin{aligned} \kappa_4^\eta(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = & 16 a^4 \{ B[\tau_2] B[\tau_3] B[\tau_4 - \tau_2] B[\tau_4 - \tau_3] + \\ & + B[\tau_3] B[\tau_4] B[\tau_4 - \tau_2] B[\tau_3 - \tau_2] + \\ & + B[\tau_2] B[\tau_4] B[\tau_3 - \tau_2] B[\tau_4 - \tau_3] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_5^\eta(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) = & 32 a^5 \{ B[\tau_2] B[\tau_5] B[\tau_3 - \tau_2] \times \\ & \times B[\tau_4 - \tau_3] B[\tau_5 - \tau_4] + \dots \text{(всего 12 слагаемых)} \}. \end{aligned}$$

Сумма произведений $B[\tau]$, находящаяся в фигурных скобках, является функцией, симметричной относительно $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s$, и сами слагаемые и их число может быть определено из символических



ских диаграмм, где точки 0, 2, 3, ..., s (вершины) означают моменты времени $0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s$, а прямые линии, соединяющие точки k и l , представляют $B[\tau_l - \tau_k]$.

Таким образом, симметризация в фигурных скобках происходит по способам соединений вершин прямыми линиями. При этом к

каждой вершине подходят только две прямые, причем так, что, двигаясь по ним, можно последовательно пройти все вершины. Можно показать, что в фигурной скобке, соответствующей кумулянтной функции порядка s , всего будет $(s - 1)!/2$ слагаемых.

Если все моменты времени равны: $\tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau$, то приходим к кумулянтным функциям двумomentного распределения негауссова стационарного случайного процесса $\eta(t)$. В этом случае нетрудно привести конкретные значения кумулянтных функций и для произвольного порядка. Так, например,

$$\kappa_s^n(0, \tau, \dots, \tau) = 2^{s-1} (s - 1)! a^s D^{s-2} B^2 [\tau].$$

Кроме того,

$$\kappa_3(0, 0, \tau) = 8 a^3 D B^2 [\tau],$$

$$\kappa_4(0, 0, \tau, \tau) = 16 a^4 \{B^4 [\tau] + 2 D^2 B^2 [\tau]\},$$

$$\kappa_4(0, 0, 0, \tau) = 48 a^4 D^2 B^2 [\tau],$$

.....

$$\kappa_s(0^p, \tau^{(s-p)}) = \sum_{k=1}^p A_{kp} a^s D^{s-2k} B^{2k} [\tau], \quad p < s/2,$$

где A_{kp} — некоторые числа. Полученные кумулянтные функции исчерпывающим образом представляют двумomentное распределение стационарного негауссова процесса $\eta(t)$.

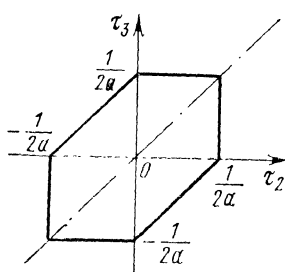


Рис. 7.2.

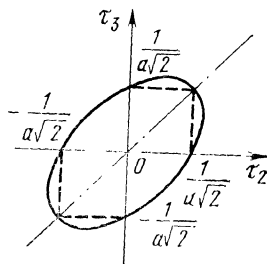


Рис. 7.3.

Нетрудно записать уравнения изокоррелянт рассматриваемого процесса. Так, изокоррелянта третьего порядка определяется выражением

$$\gamma_3(0, \tau_2, \tau_3) = 2\sqrt{2} r[\tau_2] r[\tau_3] r[\tau_3 - \tau_2] = \text{const.}$$

Для частных случаев $r[\tau] = e^{-a|\tau|}$ и $r[\tau] = e^{-a^2|\tau|^2}$ соответствующие графики изображены на рис. 7.2 и 7.3. Они описываются уравнениями

$$|\tau_2| + |\tau_3| + |\tau_3 - \tau_2| = a^{-1}, \quad \tau_2^2 + \tau_3^2 + (\tau_3 - \tau_2)^2 = a^{-2}$$

то можно показать, что все кумулянтные коэффициенты будут конечны и равны:

$$\gamma_{2n+1} = 0, \quad \gamma_{2n} = \mathcal{D}_{2n} / \mathcal{D}_2^n.$$

4. Обратимся теперь к пуассоновскому случайному процессу. Таким процессом называется суперпозиция случайно возникающих независимо друг от друга импульсов, детерминированных или случайных по форме, число возникновения которых за единицу времени определяется распределением Пуассона. Пусть

$$x(t) = \sum_i a_i F(t - t_i). \quad (7.4.6)$$

Здесь $F(t)$ — так называемый *элементарный импульс* пуассоновского процесса. Примем без потери общности, что $F(t) = 0$ для $t < 0$. Амплитуду элементарного импульса a_i , возникающего в момент времени t_i , полагаем случайной величиной с заданным вероятностным распределением. Если через n_0 обозначить среднее число возникающих импульсов за единицу времени, то вероятность возникновения k импульсов внутри интервала времени T дается распределением Пуассона:

$$p_k(T) = \frac{(n_0 T)^k}{k!} e^{-n_0 T}. \quad (7.4.7)$$

Итак, пуассоновский случайный процесс $x(t)$, заданный формулами (7.4.6), (7.4.7), представляет собой случайную суперпозицию импульсов одинаковой формы, но случайной амплитуды. В принятых предположениях этот случайный процесс является сильно стационарным. Кумулянтные функции рассматриваемого пуассоновского процесса имеют вид [52]

$$\begin{aligned} \kappa_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= n_0 \langle a^s \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F(u + \tau_2) \times \\ &\times \dots \cdot F(u + \tau_s) du. \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

Таким образом, задавая форму элементарного импульса $F(t)$, мы получаем исчерпывающую информацию о пуассоновском процессе. Именно этим и объясняется его широкое использование в различных вероятностно-прикладных исследованиях. К тому же пуассоновский случайный процесс является хорошей моделью многих реальных физических случайных процессов, особенно шумов.

Если взять $F(u) = \delta(u)$, $\langle a^s \rangle = 0$, то (7.4.8), как легко видеть, переходит в (7.4.4) с $\mathcal{D}_s = n_0 \langle a^s \rangle$. Это значит, что дельта-процесс можно рассматривать как сколь угодно быстрый пуассоновский процесс — суперпозицию случайно возникающих сколь угодно узких импульсов.

5. Еще одним интересным примером негауссового случайного процесса является *телеграфный сигнал*. Этот случайный процесс может принимать только два значения h_1 и h_2 , (рис. 7.4) с соответ-

ствующими вероятностями $p_1, p_2 = 1 - p_1$. Таким образом, вероятностное распределение телеграфного сигнала есть распределение бинарной альтернативы [см. (2.6.9)]. Моменты перемены принимаемых значений t_k случайны и не зависят друг от друга. Телеграфный сигнал может иметь различную «статистику» моментов t_k , что приводит к различным кумулянтным функциям этого случайного процесса.

Рассмотрим симметричный телеграфный сигнал, для которого $h_1 = -h, h_2 = h, p_1 = p_2 = 1/2$ (рис. 7.5). Все нечетные кумулянты и кумулянтные функции такого телеграфного сигнала, как оче-

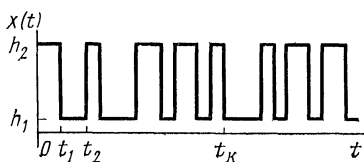


Рис. 7.4.

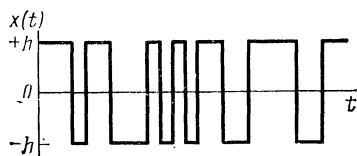


Рис. 7.5.

видно, равны нулю. Если $p_T(k)$ — вероятность k перемен значений процесса за время T — определяется законом Пуассона (7.4.7), где n_0 — среднее число перемен за единицу времени, то ковариационная функция такого телеграфного сигнала равна [53]

$$B[\tau] = h^2 \exp(-2 n_0 |\tau|). \quad (7.4.9)$$

Если же, например, перемены знака могут происходить лишь в моменты времени, кратные T , то [53]

$$B[\tau] = h^2 \Delta(\tau/T). \quad (7.4.10)$$

Другим статистическим закономерностям перемены знака будут соответствовать другие виды ковариационных функций (см. § 14.6).

Все телеграфные сигналы обладают и рядом общих свойств. Так, в § 14.7 будет показано, что какова бы ни была ковариационная функция телеграфного сигнала, его кумулянтная функция четвертого порядка всегда будет равна

$$\kappa_4(0, 0, \tau, \tau) = -2 B^2[\tau]. \quad (7.4.11)$$

Однозначная взаимосвязь с ковариационной функцией существует и для других кумулянтных функций телеграфного сигнала. Так, например, можно показать, что для симметричного телеграфного сигнала все кумулянтные функции нечетного порядка равны нулю, в то время как

$$\kappa_4(0, 0, 0, \tau) = \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau) = -2 DB[\tau],$$

$$\kappa_6(0, \tau^{[5]}) = \kappa_6(0^{[5]}, \tau) = 16 D^2 B[\tau],$$

$$\kappa_6(0^{[2]}, \tau^{[4]}) = \kappa_6(0^{[4]}, \tau^{[2]}) = 16 DB^2[\tau],$$

$$\kappa_6(0^{[3]}, \tau^{[3]}) = 4B[\tau] (3B^2[\tau] + D^2).$$

7.5. Стационарная совокупность двух процессов

1. Совокупность двух случайных процессов $\{\xi(t), \eta(t)\}$ называется сильно стационарной, если ее $2N$ -моментная плотность вероятности $W_{\xi\eta}(x_1, t_1; \dots; x_N, t_N; y_1, t'_1; \dots; y_N, t'_N)$ инварианта по отношению к замене последовательности $t_1, t_2, \dots, t_N; t'_1, t'_2, \dots, t'_N$ на последовательность $t_1 + \vartheta, t_2 + \vartheta, \dots, t_N + \vartheta; t'_1 + \vartheta, t'_2 + \vartheta, \dots, t'_N + \vartheta$, при любом ϑ .

Как плотность вероятности $W_{\xi\eta}$, так и кумулянтные функции стационарной совокупности зависят лишь от разностей, входящих в них моментов времени.

Таким образом, стационарная совокупность двух случайных процессов определяется следующим набором кумулянтных функций (здесь введены обозначения $\tau_k = t_k - t_1$, $\Theta_k = t'_k - t_1$, $\vartheta_k = t'_k - t'_1$):

$$\begin{aligned} \kappa_1^{\xi} &= \text{const}, & \kappa_1^{\eta} &= \text{const}, \\ \kappa_2^{\xi}(0, \tau_2), & \kappa_{1,1}^{\xi,\eta}(0; \Theta_1), & \kappa_2^{\eta}(0, \vartheta_2), \\ \kappa_3^{\xi}(0, \tau_2, \tau_3), & \kappa_{2,1}^{\xi,\eta}(0, \tau_2; \Theta_1), & \kappa_{1,2}^{\xi,\eta}(0; \Theta_1, \Theta_2), & \kappa_3^{\eta}(0, \vartheta_2, \vartheta_3), \\ \kappa_4^{\xi}(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4), & \kappa_{3,1}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \tau_3; \Theta_1), & \kappa_{2,2}^{\xi,\eta}(0, \tau_2; \Theta_1, \Theta_2), \\ \kappa_{1,3}^{\xi,\eta}(0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3), & \kappa_4^{\eta}(0, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4), \\ & \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что каждый из процессов, входящих в стационарную совокупность, сам по себе стационарен. Однако обратное в общем случае неверно. Из стационарности случайных процессов по отдельности вовсе не следует стационарность их совокупности. Для того, чтобы стационарные процессы образовали стационарную совокупность, необходимо, чтобы *все* совместные кумулянтные функции имели вид

$$\kappa_{p,s}^{\xi,\eta}(t_1, \dots, t_p; t'_1, \dots, t'_s) = \kappa_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \Theta_1, \dots, \Theta_s). \quad (7.5.1)$$

Первая группа аргументов правой части (7.5.1) (т. е. до точки с запятой) всегда будет относиться к первым индексам (верхнему и нижнему), а вторая группа аргументов — ко вторым.

Будем говорить, что случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ *стационарно связаны*, если их совместные кумулянтные функции имеют вид (7.5.1). Таким образом, чтобы стационарные процессы образовали стационарную совокупность, необходимо (и достаточно), чтобы они были к тому же стационарно связаны.

Совокупность двух случайных процессов $\{\xi(t), \eta(t)\}$ называется слабо стационарной, если

$$\begin{aligned} m_{\xi}(t) &= \text{const}, & m_{\eta}(t) &= \text{const}, \\ B_{\xi}[t_1, t_2] &= B_{\xi}[t_2 - t_1], & B_{\xi\eta}[t_1, t_2] &= B_{\xi\eta}[t_2 - t_1], \\ B_{\eta}[t_1, t_2] &= B_{\eta}[t_2 - t_1]. \end{aligned}$$

Два случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются *слабо стационарными*, если $B_{\xi\eta}[t_1, t_2] = B_{\xi\eta}[t_2 - t_1]$, в то время как вышние совместные кумулянтные функции могут зависеть от времени любым образом. Заметим, что аргумент совместной ковариационной функции всегда будет разностью между аргументом второго индекса (случайного процесса $\eta(t)$) и аргументом первого индекса (случайного процесса $\xi(t)$).

Нетрудно установить свойства симметрии совместных кумулянтных функций. Принимая во внимание правило аргументов и индексов, а также симметричность кумулянтных функций к любым перестановкам аргументов и их инвариантность к началу отсчета времени, легко обнаружить, например, что

$$\begin{aligned} \kappa_{1,1}^{\xi,\eta}(0; \Theta) &= \kappa_{1,1}^{\eta,\xi}(0; -\Theta), \\ \kappa_{2,1}^{\xi,\eta}(0, \tau; \theta) &= \kappa_{2,1}^{\xi,\eta}(0, -\tau; \theta - \tau) = \kappa_{1,2}^{\eta,\xi}(0; -\theta, \tau - \theta), \\ \kappa_{2,2}^{\xi,\eta}(0; \theta_1, \theta_2) &= \kappa_{2,1}^{\eta,\xi}(0, \theta_2 - \theta_1; -\theta_1) = \kappa_{2,1}^{\xi,\eta}(0, \theta_1 - \theta_2; -\theta_2), \\ \kappa_{3,1}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \tau_3; \theta_1) &= \kappa_{3,1}^{\xi,\eta}(0, -\tau_2, \tau_3 - \tau_2; \theta_1 - \tau_2) = \\ &= \kappa_{3,1}^{\xi,\eta}(0, \tau_2 - \tau_3, -\tau_3; \theta_1 - \tau_3) = \kappa_{1,3}^{\eta,\xi}(0; -\theta_1, \tau_2 - \\ &- \theta_1, \tau_3 - \theta_1). \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

В общем случае свойства симметрии могут быть записаны в следующем виде (если на место первого аргумента всегда ставить ноль):

$$\begin{aligned} \kappa_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p; \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q) &= \\ &= \kappa_{p,q}^{\xi,\eta}(0, -\tau_2, \tau_3 - \tau_2, \tau_4 - \tau_2, \dots, \tau_p - \tau_2; \theta_1 - \tau_2, \theta_2 - \\ &- \tau_2, \dots, \theta_q - \tau_2) = \kappa_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \tau_2 - \tau_3, -\tau_3, \tau_4 - \\ &- \tau_3, \dots, \tau_p - \tau_3; \theta_1 - \tau_3, \theta_2 - \tau_3, \dots, \theta_q - \tau_3) = \dots = \\ &= \kappa_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \tau_2 - \tau_p, \tau_3 - \tau_p, \dots, \tau_{p-1} - \tau_p, -\tau_p; \\ \Theta_1 - \tau_p, \theta_2 - \tau_p, \dots, \theta_q - \tau_p) &= \\ &= \kappa_{q,p}^{\eta,\xi}(0, \theta_2 - \theta_1, \dots, \theta_q - \theta_1; -\theta_1, \tau_2 - \theta_1, \tau_3 - \theta_1, \dots, \tau_p - \\ &- \theta_1) = \kappa_{q,p}^{\eta,\xi}(0, \theta_1 - \theta_2, \theta_3 - \theta_2, \dots, \theta_q - \theta_2; -\theta_2, \tau_2 - \\ &- \theta_2, \tau_3 - \theta_2, \dots, \tau_p - \theta_2) = \dots = \\ &= \kappa_{q,p}^{\eta,\xi}(0, \theta_1 - \theta_q, \theta_2 - \theta_q, \dots, \theta_{q-1} - \theta_q; -\theta_q, \tau_2 - \\ &- \theta_q, \tau_3 - \theta_q, \dots, \tau_p - \theta_q). \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

Нетрудно проверить, что все эти соотношения, как и должно быть, автоматически переходят в (7.2.1) — (7.2.6), когда $\eta = \xi$.

Все приведенные формулы остаются справедливыми, если вместо кумулянтных функций рассматривать моментные функции

$$\alpha_{p,q}^{\xi,\eta}(t_1, \dots, t_p; t'_1, \dots, t'_q) = \alpha_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \Theta_1, \dots, \Theta_q),$$

а также и нормированные совместные кумулянтные функции

$$\begin{aligned} \gamma_{p,q}^{\xi,\eta}(t_1, \dots, t_p; t'_1, t'_2, \dots, t'_q) &= \\ &= \gamma_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q). \end{aligned}$$

2. Совместная корреляционная и ковариационная функции стационарной совокупности $\{\xi(t), \eta(t)\}$ связаны, согласно (6.5.3), соотношением $K_{\xi\eta}[\tau] = B_{\xi\eta}[\tau] + m_{\xi}m_{\eta}$.

Обратимся к свойствам функций $B_{\xi\eta}[\tau]$ и $K_{\xi\eta}[\tau]$. Так как их свойства будут полностью совпадать, то в этом параграфе обе функции обозначим через $A_{\xi\eta}[\tau]$.

Если ковариационная и корреляционная функции случайного процесса являлись обязательно четными, то совместные функции $A_{\xi\eta}[\tau]$ могут быть любыми, в том числе и четными и нечетными. Это ведет, в частности, к тому, что относительно $A_{\xi\eta}[0]$ ничего определенного сказать нельзя. Эта величина может принимать любые значения, как отрицательные, так и положительные, и также быть равной нулю.

Совместная функция $A_{\xi\eta}[\tau]$ обладает следующими свойствами:

- 1) $A_{\xi\eta}[-\tau] = A_{\eta\xi}[\tau]$,
- 2) $|A_{\xi\eta}[\tau]| \leq \sqrt{A_{\xi\xi}[0] A_{\eta\eta}[0]}$,
- 3) $A_{\xi\xi}[\tau]$ обладает свойствами ковариационной функции

Совместную функцию $A_{\xi\eta}[\tau]$ можно однозначным способом разложить на четную и нечетную составляющие:

$$A_{\xi\eta}[\tau] = A_{\xi\eta}^0[\tau] + A_{\xi\eta}^1[\tau], \quad (7.5.5)$$

где ноль и единица сверху будут всюду в дальнейшем означать соответственно четную и нечетную функцию аргумента.

Эти функции определяются как^{*)}

$$A_{\xi\eta}^0[\tau] \equiv \frac{1}{2} (A_{\xi\eta}[\tau] + A_{\xi\eta}[-\tau]) = \frac{1}{2} (A_{\xi\eta}[\tau] + A_{\eta\xi}[\tau]),$$

$$A_{\xi\eta}^1[\tau] \equiv \frac{1}{2} (A_{\xi\eta}[\tau] - A_{\xi\eta}[-\tau]) = \frac{1}{2} (A_{\xi\eta}[\tau] - A_{\eta\xi}[\tau]).$$

Отсюда следует, что

$$A_{\eta\xi}^0[\tau] = A_{\xi\eta}^0[\tau], \quad A_{\eta\xi}^1[\tau] = -A_{\xi\eta}^1[\tau]. \quad (7.5.6)$$

Это, в свою очередь, ведет к

$$A_{\eta\xi}[\tau] = A_{\xi\eta}^0[\tau] - A_{\xi\eta}^1[\tau]. \quad (7.5.7)$$

Заметим, что $A_{\xi\eta}^0[\tau]$ как некоторая четная функция необязательно положительно-определенная.

^{*)} При этом мы всегда будем доопределять нечетную функцию так, чтобы $A_{\xi\eta}^1[0] = 0$, т. е. чтобы $A_{\xi\eta}[0] = A_{\xi\eta}^0[0]$.

7.6. Стационарные векторные процессы

1. Векторный случайный процесс или, другими словами, совокупность случайных процессов $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)\}$ называется слабо стационарным процессом (слабо стационарной совокупностью), если

$$m_{\xi}(t) = \text{const}, \quad B_{\xi}[t, t'] \equiv B_{\xi}[t' - t].$$

Наряду с ковариационной матрицей для стационарного векторного процесса от разности моментов времени зависит также и корреляционная матрица [см. (6.5.4)]:

$$K_{\xi}[t, t'] \equiv K_{\xi}[t' - t].$$

2. Для рассмотрения совпадающих свойств ковариационной и корреляционной матриц вновь удобно ввести общее обозначение $A_{\xi}[\tau]$. Из (6.5.5) следует свойство, аналогичное первому свойству (7.5.4): $A_{\xi}[-\tau] = A_{\xi}^+[\tau]$.

Рассматриваемая матрица также может быть разложена на четную и нечетную компоненты:

$$\begin{aligned} A_{\xi}[\tau] &= A_{\xi}^0[\tau] + A_{\xi}^1[\tau], \quad A_{\xi}^0[\tau] \equiv \frac{1}{2} \{A_{\xi}[\tau] + A_{\xi}^+[\tau]\}, \\ A_{\xi}^1[\tau] &\equiv \frac{1}{2} \{A_{\xi}[\tau] - A_{\xi}^+[\tau]\}, \quad A_{\xi}^1[0] = 0. \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

Эти формулы показывают, что ковариационная (корреляционная) матрица вовсе не имеет смысла автоковариационной (автокорреляционной) матрицы, таких матриц просто-напросто нет. Матрица $A_{\xi}[\tau]$ имеет смысл *совместной* матрицы. У этой матрицы главная диагональ составлена из автоковариационных (автокорреляционных) функций, в то время как все остальные ее элементы суть совместные ковариационные (корреляционные) функции случайных процессов.

Аналогом формул (7.5.6), (7.5.7) являются формулы

$$\begin{aligned} (A_{\xi}^0[\tau])^+ &= A_{\xi}^0[\tau], \quad (A_{\xi}^1[\tau])^+ = -A_{\xi}^1[\tau], \\ A_{\xi}^+[\tau] &= A_{\xi}^0[\tau] - A_{\xi}^1[\tau]. \end{aligned}$$

Матрица $A_{\xi}^0[\tau]$ есть симметрическая матрица, а $A_{\xi}^1[\tau]$ — антисимметрическая.

7.7. Формулы размыкания моментных и кумулянтных скобок для совокупности двух процессов

1. Приведем теперь необходимые для дальнейшего формулы размыкания некоторых моментных и кумулянтных скобок, аргументами которых являются случайные процессы, взятые в различные моменты времени. Эти формулы получаются элементарным путем из ранее найденных формул размыкания моментных и кумулянтных

скобок для случайных величин. При этом мы ограничимся в соответствии с названием настоящей главы только стационарными случайными процессами и их совокупностями.

Для таких процессов и совокупностей, рассматриваемых в два момента времени, введем следующие обозначения некоторых моментных и кумулянтных скобок, которые будут встречаться в дальнейшем наиболее часто:

$$\begin{aligned}\alpha_{1,m}(\tau) &\equiv \langle x x_{\tau}^m \rangle, \quad \kappa_{1,m}(\tau) \equiv \langle x, x_{\tau}^{[m]} \rangle, \\ \alpha_{1,m}^{x,y\tau}(\tau) &\equiv \langle x y_{\tau}^m \rangle, \quad \kappa_{1,m}^{x,y\tau}(\tau) \equiv \langle x, y_{\tau}^{[m]} \rangle, \\ \alpha_{1,n,m}^{x,x_{\tau},y\tau}(\tau) &\equiv \langle x x_{\tau}^n y_{\tau}^m \rangle, \quad \kappa_{1,n,m}^{x,x_{\tau},y\tau}(\tau) \equiv \langle x, x_{\tau}^{[n]}, y_{\tau}^{[m]} \rangle\end{aligned}\quad (7.7.1)$$

и т. п.

Здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x_{\tau} = x(t + \tau)$, $y_{\tau} = y(t + \tau)$.

2. Полагая в (3.4.1) $y = x_{\tau}$, получим

$$\langle x f(x_{\tau}) \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \kappa_{1,s}(\tau). \quad (7.7.2)$$

Разложение соответствующей кумулянтной скобки имеет вид

$$\langle x, f(x_{\tau}) \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \kappa_{1,s}(\tau). \quad (7.7.3)$$

Эти формулы относятся к двумоментному распределению одного случайного процесса. Для двух случайных процессов (3.4.1) и (4.7.6) приведут нас к выражениям

$$\begin{aligned}\langle x, f(y_{\tau}) \rangle &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \kappa_{1,s}^{x,y\tau}(\tau), \\ \langle x, f(y_{\tau}) \rangle &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \kappa_{1,s}^{x,y\tau}(\tau).\end{aligned}\quad (7.7.4)$$

Для двумоментного распределения двух случайных процессов из (3.4.6) находим

$$\begin{aligned}\langle x f(x_{\tau}, y_{\tau}) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \left\langle \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x, y) \right\rangle \kappa_{1,k,l}^{x,x_{\tau},y\tau}(\tau), \\ \langle y f(x_{\tau}, y_{\tau}) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \left\langle \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x, y) \right\rangle \kappa_{1,k,l}^{y,x_{\tau},y\tau}(\tau).\end{aligned}\quad (7.7.5)$$

Для кумулянтных скобок аналогичные формулы получаются из (4.7.9):

$$\langle x, f(x_{\tau}, y_{\tau}) \rangle = \sum_{k+l \geq 0} \sum_{k,l \geq 0} \frac{1}{k! l!} \left\langle \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x, y) \right\rangle \kappa_{1,k,l}^{x,x_{\tau},y\tau}(\tau),$$

$$\langle y, f(x_\tau, y_\tau) \rangle = \sum_{k+l \geq 0} \sum_{k! l!} \frac{1}{k! l!} \left\langle \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x, y) \right\rangle \kappa_{1, k, l}^{y, x_\tau, y_\tau}(\tau). \quad (7.7.6)$$

3. Интересной особенностью полученных формул размыкания (7.7.2) — (7.7.6) является *линейная* зависимость их правых частей от кумулянтных функций вида (7.7.1). С помощью кумулянтных уравнений нетрудно доказать, что такая ситуация будет иметь место всякий раз, когда по крайней мере одна из переменных (x или y) будет входить линейно в моментные или кумулянтные скобки при произвольной зависимости от x_τ, y_τ . При этом как порядок скобок, так и их структура могут быть любыми. Это подтверждается, например, формулой размыкания кумулянтной скобки третьего порядка

$$\begin{aligned} \langle x, y_\tau, f(y_\tau) \rangle &= \langle y, f' \rangle \kappa_{1,1}^{x, y_\tau}(\tau) + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s!} [s \langle f^{(s-1)} \rangle + \\ &+ \langle y, f^{(s)} \rangle] \kappa_{1,s}^{x, y_\tau}(\tau), \end{aligned} \quad (7.7.7)$$

которая вытекает из (4.7.16), а также формулами

$$\begin{aligned} \langle u_\tau, z f(x_\tau, y_\tau) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n! m!} \left\langle \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} (u, f) \right\rangle \kappa_{1,n,m}^{z, x_\tau, y_\tau}(\tau), \\ \langle u_\tau, v_\tau, z f(x_\tau, y_\tau) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n! m!} \left\langle \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} (u, v, f) \right\rangle \times \\ &\times \kappa_{1,n,m}^{z, x_\tau, y_\tau}(\tau), \end{aligned} \quad (7.7.8)$$

следующими из (II.11), (II.12). Здесь переменные z, u, v принимают независимо друг от друга значения x или y . Первая формула (7.7.8) содержит, по существу, четыре отдельные формулы, а вторая — восемь.

4. Важным следствием отмеченной выше особенности формул размыкания моментных скобок является элементарно доказываемая *линейность* взаимосвязи моментных и кумулянтных функций вида (7.7.1). Полагая, например, в формуле (7.7.2) $f(x_\tau) = x_\tau^n$, сразу же найдем, что

$$\alpha_{1,n}(\tau) = \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha_{n-k} \kappa_{1,k}(\tau). \quad (7.7.9)$$

Аналогичным образом из формул (7.7.5) получим

$$\alpha_{1,n,m}^{x, x_\tau, y_\tau}(\tau) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m C_n^k C_m^l \alpha_{(n-k), (m-l)}^{x, y} \kappa_{1,k,l}^{x, x_\tau, y_\tau}(\tau),$$

$$\alpha_{1,n,m}^{y,x\tau,y\tau}(\tau) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m C_n^k C_m^l \alpha_{(n-k)(m-l)}^{x,y} \alpha_{1,k,l}^{y,x\tau,y\tau}(\tau). \quad (7.7.10)$$

Входящие в (7.7.9), (7.7.10) одномерные и двумерные моменты от времени τ не зависят.

Глава 8

СПЕКТРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

8.1. Спектральная плотность

1. Рассмотрим стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $K_\xi[\tau]$. Поскольку [37, 40] всякая положительно-определенная функция $F[\tau]$ может быть представлена в виде

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} dT(\omega),$$

где $T(\omega)$ — некоторая неубывающая вещественная ограниченная функция, то, следовательно, в таком виде представима и корреляционная функция $K_\xi[\tau]$. Имея в виду ее четность и записывая $dT(\omega) \equiv S_\xi(\omega) d\omega$, где $S_\xi(\omega)$ будем понимать, если нужно, в смысле обобщенной производной, получим

$$K_\xi[\tau] = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (8.1.1)$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$S_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi[\tau] \cos \omega\tau d\tau. \quad (8.1.2)$$

Функция $T(\omega)$ называется *спектральной интенсивностью*, а ее производная $S_\xi(\omega)$ — *спектральной плотностью мощности* случайного процесса $\xi(t)$ или просто *спектральной плотностью*, поскольку $\langle \xi^2 \rangle$ не всегда имеет смысл мощности процесса (см. обсуждение этого вопроса в [71]).

Формулы (8.1.1), (8.1.2), связывающие между собой корреляционную функцию и спектральную плотность случайного стационарного процесса, широко известны как соотношения Винера — Хинчина. Они показывают, что $K_\xi[\tau]$ и $S_\xi(\omega)$ есть пара косинус — трансформаций Фурье.

2. В дальнейшем трансформации Фурье мы всюду будем записывать более кратко. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{F}\{A(\tau); \omega\tau\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau,$$

$$\mathcal{F}_c\{A(\tau); \omega\tau\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \cos \omega\tau d\tau,$$

$$\mathcal{F}_s\{A(\tau); \omega\tau\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \sin \omega\tau d\tau.$$

Интеграция идет по переменной, входящей в оба аргумента фигурной скобки. В таких обозначениях соотношения Винера — Хинчина примут вид

$$K[\tau] = 2\pi \mathcal{F}_c\{S(\omega); \omega\tau\}, \quad S(\omega) = \mathcal{F}_c\{K[\tau]; \omega\tau\}.$$

8.2. Спектральные матрицы

1. Стационарная совокупность двух случайных процессов $u = \{\xi(t), \eta(t)\}$ обладает корреляционной матрицей

$$K_u[\tau] = \begin{vmatrix} K_{\xi\xi}[\tau] & K_{\xi\eta}[\tau] \\ K_{\eta\xi}[\tau] & K_{\eta\eta}[\tau] \end{vmatrix}. \quad (8.2.1)$$

Определим *спектральную матрицу* совокупности случайных процессов как матрицу

$$S_u(\omega) \equiv \mathcal{F}\{K_u[\tau]; -\omega\tau\}, \quad (8.2.2)$$

элементы которой равны преобразованиям Фурье от соответствующих элементов корреляционной матрицы (8.2.1):

$$S_u(\omega) = \begin{vmatrix} S_{\xi\xi}(\omega) & S_{\xi\eta}(\omega) \\ S_{\eta\xi}(\omega) & S_{\eta\eta}(\omega) \end{vmatrix}.$$

2. Значения диагональных элементов этой матрицы совпадают с (8.1.2). Рассмотрим подробнее недиагональные элементы, представляющие собой *совместные* спектральные плотности случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Согласно (8.2.2)

$$S_{\xi\eta}(\omega) \equiv \mathcal{F}\{K_{\xi\eta}[\tau]; -\omega\tau\}. \quad (8.2.3)$$

Поскольку совместная корреляционная функция $K_{\xi\eta}[\tau]$ уже не является в общем случае положительно-определенной, то совместная спектральная плотность $S_{\xi\eta}(\omega)$ может принимать и отрицательные значения. Кроме того, в силу (7.5.4), (8.2.3)

$$S_{\xi\eta}(-\omega) = S_{\xi\eta}^*(\omega) = S_{\eta\xi}(\omega).$$

Совместная спектральная плотность представляет собой в общем случае комплексную функцию частоты

$$S_{\xi\eta}(\omega) = S_{\xi\eta}^0(\omega) - jS_{\xi\eta}^1(\omega), \quad (8.2.4)$$

где

$$S_{\xi\eta}^0(\omega) = \mathcal{F}_c\{K_{\xi\eta}^0[\tau]; \omega\tau\}, \quad S_{\xi\eta}^1(\omega) = \mathcal{F}_s\{K_{\xi\eta}^1[\tau]; \omega\tau\}.$$

Здесь использовано разложение совместной корреляционной функции на четную и нечетную компоненты [см. (7.5.5)]. Вещественную часть совместной спектральной плотности, являющуюся четной функцией частоты, назовем *четной* совместной спектральной плотностью, а мнимую часть — *нечетной*. Легко видеть также, что $S^1(0) = 0$.

«Обратные» формулы, выражающие компоненты совместной корреляционной функции через совместные спектральные плотности, имеют вид

$$K_{\xi\eta}^0[\tau] = 2\pi \mathcal{F}_c\{S_{\xi\eta}^0(\omega); \omega\tau\}, \quad K_{\xi\eta}^1[\tau] = \\ = 2\pi \mathcal{F}_s\{S_{\xi\eta}^1(\omega); \omega\tau\}.$$

Таким образом,

$$K_u[\tau] = 2\pi \mathcal{F}\{S_u(\omega); \omega\tau\}. \quad (8.2.5)$$

3. Рассмотрим на двух простых примерах, какой вклад могут вносить в спектр четная и нечетная компоненты совместной спектральной плотности $S_{\xi\eta}(\omega)$.

Пример 8.2.1. Найдем спектральную плотность случайного процесса

$$\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t),$$

слагаемые которого образуют стационарную совокупность. Корреляционная функция суммы равна

$$K_{\zeta}[\tau] = K_{\xi}[\tau] + K_{\eta}[\tau] + 2K_{\xi\eta}^0[\tau].$$

Чтобы найти $S_{\zeta}(\omega)$, необходимо взять косинус-трансформацию Фурье В результате получим

$$S_{\zeta}(\omega) = S_{\xi}(\omega) + S_{\eta}(\omega) + 2S_{\xi\eta}^0(\omega). \quad (8.2.6)$$

Таким образом, спектр суммы произвольных случайных процессов вовсе не равен сумме их спектров. Третье слагаемое в (8.2.6) играет роль некоторого *интерференционного* члена. Этот член дает дополнительный вклад за счет коррелированности, или, как часто говорят в физике, за счет *когерентности* процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Причем этот интерференционный член может быть и отрицательным. В самом деле, пусть $\eta(t) \equiv -\xi(t)$, тогда $\zeta(t) \equiv 0$. Так как $S_{\zeta}(\omega) = 2[S_{\xi}(\omega) + S_{\xi\eta}^0(\omega)] \equiv 0$, то $S_{\xi\eta}^0(\omega) \equiv -S_{\xi}(\omega) < 0$ для всех ω .

Интересно отметить также, что вклад в интерференционный член дает именно четная корреляция. Если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ коррелированы, но нечетным образом, так что $K_{\xi\eta}^0[\tau] \equiv 0$, а $K_{\xi\eta}^1[\tau] \neq 0$, то, несмотря на коррелированность процессов, никакого интерференционного члена в спектре суммы не появится.

Пример 8.2.2. Рассмотрим ту же задачу для случайного процесса $\xi(t) = \xi(t) + \eta(t + \tau_0)$, где τ_0 — некоторая временная задержка. В этом случае

$$K_{\xi}[\tau] = K_{\xi}[\tau] + K_{\eta}[\tau] + K_{\xi\eta}[\tau_0 + \tau] + K_{\xi\eta}[\tau_0 - \tau].$$

Совершая преобразование Фурье, получим

$$S_{\xi}(\omega) = S_{\xi}(\omega) + S_{\eta}(\omega) + 2S_{\xi\eta}^0(\omega) \cos \omega\tau_0 + 2S_{\xi\eta}^1(\omega) \sin \omega\tau_0, \quad (8.2.7)$$

что, как и должно быть, совпадает с (8.2.6) при $\tau_0 = 0$. Интерференционный член содержит теперь не только четную совместную спектральную плотность, но и нечетную, обусловленную нечетной корреляции процессов. Таким образом, как $S_{\xi\eta}^1(\omega)$, так и $S_{\xi\eta}^0(\omega)$ могут давать вклад в спектры случайных процессов.

4. Разложению совместной спектральной плотности (8.2.4) аналогично разложение спектральной матрицы. Рассмотрим стационарный векторный процесс $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)\}$ с корреляционной $K_{\xi}[\tau]$ и спектральной $S_{\xi}(\omega)$ матрицами, связанными соотношениями (8.2.2), (8.2.5).

Используя (7.6.1), найдем $S_{\xi}(\omega) = S_{\xi}^0(\omega) - jS_{\xi}^1(\omega)$. Здесь четная спектральная матрица

$$S_{\xi}^0(\omega) = \mathcal{F}_c \{K_{\xi}^0[\tau]; \omega\tau\} \quad (8.2.8)$$

имеет своими элементами $S_{\xi_i\xi_j}^0(\omega)$, а элементы нечетной спектральной матрицы

$$S_{\xi}^1(\omega) = \mathcal{F}_s \{K_{\xi}^1[\tau]; \omega\tau\} \quad (8.2.9)$$

суть $S_{\xi_i\xi_j}^1(\omega)$. Диагональными элементами матрицы $S_{\xi}^0(\omega)$ являются $S_{\xi_i\xi_i}^0(\omega)$, а у матрицы $S_{\xi}^1(\omega)$ они равны нулю.

Очевидно, что $S_{\xi}^1(0)$ есть нулевая матрица.

Если ввести в рассмотрение транспонированную спектральную матрицу $S_{\xi}^{\dagger}(\omega)$, то легко видеть, что она связана с $K_{\xi}^{\dagger}[\tau]$ преобразованием (8.2.2), и, кроме того,

$$S_{\xi}^{\dagger}(\omega) = S_{\xi}^*(\omega) = S_{\xi}^0(\omega) + jS_{\xi}^1(\omega). \quad (8.2.10)$$

Отсюда следует, что $S_{\xi}^0(\omega)$ есть симметрическая матрица, а $S_{\xi}^1(\omega)$ — антисимметрическая.

Формулы, обратные (8.2.8), (8.2.9), имеют вид

$$K_{\xi}^0[\tau] = 2\pi \mathcal{F}_c \{S_{\xi}^0(\omega); \omega\tau\},$$

$$K_{\xi}^1[\tau] = 2\pi \mathcal{F}_s \{S_{\xi}^1(\omega); \omega\tau\}.$$

8.3. Спектры высших порядков

1. Спектр случайного стационарного процесса определяется как сопряженная Фурье от корреляционной функции $K_{\xi}[\tau] = B_{\xi}[\tau] + m_{\xi}^2$. Поэтому

$$S_{\xi}(\omega) = \mathcal{F} \{B_{\xi}[\tau]; -\omega\tau\} + m_{\xi}^2 \delta(\omega).$$

Первое слагаемое в правой части является спектральной плотностью центрированного случайного процесса $\xi^0(t) = \xi(t) - m_\xi$. Введем для нее специальное обозначение

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_\xi^0(0, \omega) &\equiv G_\xi(\omega) \equiv \mathcal{F}\{\kappa_\xi^0(0, \tau); -\omega\tau\} = \\ &= \mathcal{F}_c\{\kappa_\xi^0(0, \tau); \omega\tau\}.\end{aligned}\quad (8.3.1)$$

Таким образом,

$$S_\xi(\omega) = G_\xi(\omega) + m_\xi^2 \delta(\omega). \quad (8.3.2)$$

Второе слагаемое описывает спектр постоянной составляющей случайного процесса $\xi(t)$, а первое — спектр его флуктуационной части.

2. При оперировании с кумулянтными функциями $\kappa_s(0, \tau_2, \dots, \tau_s)$, $s \geq 2$ нетрудно построить обобщение спектральной плотности $\hat{\kappa}_2(0, \omega)$ на высшие порядки, рассматривая $(s-1)$ -мерную трансформацию Фурье [10]

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{s-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \\ &\dots, \tau_s) \exp[-j(\omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3 + \dots + \omega_s \tau_s)] d\tau_2 d\tau_3 \dots d\tau_s \equiv \\ &\equiv \mathcal{F}^{s-1}\{\kappa_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s); -\omega_2 \tau_2 - \dots - \omega_s \tau_s\}.\end{aligned}\quad (8.3.3)$$

Вследствие симметричности кумулянтной функции по отношению к τ_h функция $\hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$, которую мы будем называть *спектральной плотностью s -го порядка*, также является симметрической функцией аргументов ω_h .

Таким образом, заданному набору кумулянтных функций

$$\kappa_1, \kappa_2(0, \tau), \kappa_3(0, \tau_2, \tau_3), \dots, \kappa_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s),$$

исчерпывающим образом представляющему стационарный случайный процесс, соответствует набор спектральных плотностей (или будем говорить — набор спектров)

$$\kappa_1^2 \delta(\omega), \hat{\kappa}_2(0, \omega), \hat{\kappa}_3(0, \omega_2, \omega_3), \dots, \hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s), \quad (8.3.4)$$

представляющий случайный стационарный процесс также исчерпывающим образом.

Если набор спектральных плотностей (8.3.4) задан, то кумулянтные функции находятся в соответствии с обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}\kappa_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) \times \\ &\times \exp[j(\omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3 + \dots + \omega_s \tau_s)] d\omega_2 d\omega_3 \dots d\omega_s \equiv \\ &\equiv (2\pi)^{s-1} \mathcal{F}^{s-1}\{\hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \dots, \omega_s); \omega_2 \tau_2 + \dots + \omega_s \tau_s\}.\end{aligned}\quad (8.3.5)$$

Аналогичным образом получим

$$G_{1,2}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}_3(0, \omega - \Omega, \Omega) d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}_3(0, \Omega, \omega - \Omega) d\Omega. \quad (8.3.9)$$

В общем случае спектральная плотность $G_{p,q}(\omega)$, где $p + q = r$, следующим образом выражается через $\kappa_r(0, \omega_2, \dots, \omega_r)$:

$$\begin{aligned} G_{p,q}(\omega) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}_r(0, \omega - \Omega_1, \Omega_1 - \Omega_2, \dots, \Omega_{q-2} - \Omega_{q-1}, \Omega_q, \dots, \\ &\dots, \Omega_{r-2}) d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_{r-2}. \end{aligned} \quad (8.3.10)$$

5. Симметрия кумулянтных функций случайного стационарного процесса, представленная формулами (7.2.1) — (7.2.6), должна привести к подобной же симметрии спектральных плотностей $\hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$.

Если рассмотреть $\hat{\kappa}_2(0, \omega)$, то из (8.3.1) и условия $\kappa_2(0, \tau) = \kappa_2(0, -\tau)$ вытекает полученное ранее свойство четности спектральной плотности второго порядка: $\kappa_2(0, \omega) = \kappa_2(0, -\omega)$.

Из условий симметрии

$$\begin{aligned} \kappa_3(0, \tau_2, \tau_3) &= \kappa_3(0, -\tau_2, \tau_3 - \tau_2) = \\ &= \kappa_3(0, \tau_2 - \tau_3, -\tau_3) \end{aligned}$$

можно получить соотношения

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_3(0, \omega_2, \omega_3) &= \hat{\kappa}_3(0, -\omega_2 - \omega_3, \omega_3) = \\ &= \hat{\kappa}_3(0, \omega_2, -\omega_2 - \omega_3), \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

которым должна подчиняться спектральная плотность третьего порядка любого случайного стационарного процесса. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_3(0, -\omega_2, \omega_3) &= \hat{\kappa}_3(0, \omega_2, -\omega_3, \omega_3) = \hat{\kappa}_3(0, -\omega_2, \omega_2 - \omega_3), \\ \hat{\kappa}_3(0, \omega_2, -\omega_3) &= \hat{\kappa}_3(0, \omega_3 - \omega_2, -\omega_3) = \\ &= \hat{\kappa}_3(0, \omega_2, \omega_3 - \omega_2), \\ \hat{\kappa}_3(0, -\omega_2, -\omega_3) &= \hat{\kappa}_3(0, \omega_2 + \omega_3, -\omega_3) = \\ &= \hat{\kappa}_3(0, -\omega_2, \omega_2 + \omega_3). \end{aligned}$$

Для спектральной плотности четвертого порядка аналогично найдем

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_4(0, \omega_2, \omega_3, \omega_4) &= \hat{\kappa}_4(0, -\omega_2 - \omega_3 - \omega_4, \omega_3, \omega_4) = \\ &= \hat{\kappa}_4(0, \omega_2, -\omega_2 - \omega_3 - \omega_4, \omega_4) = \\ &= \hat{\kappa}_4(0, \omega_2, \omega_3, -\omega_2 - \omega_3 - \omega_4). \end{aligned}$$

Это приведет к

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_4(0, -\omega_2, \omega_3, \omega_4) &= \hat{\kappa}_4(0, \omega_2 - \omega_3 - \omega_4, \omega_3, \omega_4) = \\ &= \hat{\kappa}_4(0, -\omega_2, \omega_2 - \omega_3 - \omega_4, \omega_4) = \hat{\kappa}_4(0, -\omega_2, \omega_3, \omega_2 - \\ &- \omega_3 - \omega_4), \\ \hat{\kappa}_4(0, -\omega_2, -\omega_3, \omega_4) &= \hat{\kappa}_4(0, \omega_2 + \omega_3 - \omega_4, - \\ &- \omega_3, \omega_4) = \hat{\kappa}_4(0, -\omega_2, \omega_2 + \omega_3 - \omega_4, \omega_4) = \\ &= \hat{\kappa}_4(0, -\omega_2, -\omega_3, \omega_2 + \omega_3 - \omega_4), \\ \hat{\kappa}_4(0, -\omega_2, -\omega_3, -\omega_4) &= \hat{\kappa}_4(0, \omega_2 + \omega_3 + \omega_4, \\ &- \omega_3, -\omega_4) = \hat{\kappa}_4(0, -\omega_2, \omega_2 + \omega_3 + \omega_4, -\omega_4) = \\ &= \hat{\kappa}_4(0, -\omega_2, -\omega_3, \omega_2 + \omega_3 + \omega_4).\end{aligned}$$

В общем случае на основании (7.2.6) и (8.3.3)

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) &= \hat{\kappa}_s(0, -\omega_2 - \omega_3 - \dots - \\ &- \omega_s, \omega_3, \dots, \omega_s) = \hat{\kappa}_s(0, \omega_2, -\omega_2 - \omega_3 - \dots - \\ &- \omega_s, \omega_4, \dots, \omega_s) = \dots = \hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{s-1}, -\omega_2 - \\ &- \omega_3 - \dots - \omega_s).\end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли общие условия симметрии, которым подчиняются спектральные плотности высших порядков произвольного стационарного случайного процесса. В этом плане четность спектральной плотности $S(\omega)$ выглядит как частный случай.

6. Полученные условия симметрии спектральных плотностей $\hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$ должны, в свою очередь, привести к симметрии спектральных плотностей $G_{p,q}(\omega)$.

Используя (8.3.8), (8.3.9) и (8.3.11), получим, например,

$$\begin{aligned}G_{2,1}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}_3(0, -\omega, \Omega) d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}_3(0, \omega - \Omega, \Omega) d\Omega = \\ &= G_{1,2}(\omega), \\ G_{1,2}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}_3(0, -\omega - \Omega, \Omega) d\Omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}_3(0, \omega, \Omega) d\Omega = G_{2,1}(\omega).\end{aligned}$$

Аналогичным образом придем к общей формуле $G_{p,q}(-\omega) = G_{q,p}(\omega)$, описывающей свойства симметрии спектральных плотностей $G_{p,q}(\omega)$. Следовательно, сумма спектральных плотностей $G_{p,q}(\omega) + G_{q,p}(\omega)$ есть четная функция частоты, так же как и спектральные плотности $G_{p,p}(\omega)$. Эти обстоятельства тесно связаны с тем, что согласно (7.2.9) суммы

$$\kappa_{p,q}(0^{(p)}, \tau^{(q)}) + \kappa_{q,p}(0^{(q)}, \tau^{(p)}),$$

так же как и $\kappa_{p,p}(0^{(p)}, \tau^{(p)})$, являются четными функциями τ ,

7. Рассмотрим теперь стационарную совокупность двух случайных процессов $\{\xi(t), \eta(t)\}$ и определим ее спектры высших порядков. На основании § 7.5 эта совокупность исчерпывающим образом представляется набором совместных кумулянтных функций

$$\kappa_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p; \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q).$$

Определим *совместные* спектральные плотности высших порядков соотношением

$$\begin{aligned} & \hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_q) \equiv \\ & \equiv \mathcal{F}^{p+q-1} \{ \kappa_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \Theta_1, \dots, \Theta_q); -\omega_2 \tau_2 - \dots \\ & \dots - \omega_p \tau_p; -\nu_1 \Theta_1 - \dots - \nu_q \Theta_q \}. \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

По заданным спектральным плотностям $\hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}$ совместные кумулянтные функции найдем как обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} & \kappa_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \Theta_1, \dots, \Theta_q) = \\ & = (2\pi)^{p+q-1} \mathcal{F}^{p+q-1} \{ \hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_q); \omega_2 \tau_2 + \dots \\ & \dots + \omega_p \tau_p; \nu_1 \Theta_1 + \dots + \nu_q \Theta_q \}. \end{aligned} \quad (8.3.13)$$

Таким образом, наряду с набором совместных кумулянтных функций стационарную совокупность двух случайных процессов исчерпывающим образом представляет и набор совместных спектральных плотностей

$$\hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_q). \quad (8.3.14)$$

Исходя из свойств симметрии совместных кумулянтных функций, нетрудно получить и свойства симметрии совместных спектральных плотностей. Если учесть, что первая группа аргументов относится к первым индексам, а вторая группа — ко вторым индексам, то очевидно, что, во-первых, спектральная плотность (8.3.14) не изменится при любой перестановке аргументов внутри каждой группы и, во-вторых,

$$\hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_q) = \hat{\kappa}_{q,p}^{\eta,\xi}(\nu_1, \dots, \nu_q; 0, \omega_2, \dots, \omega_p).$$

Если, наконец, принять во внимание формулу (7.5.3), то из (8.3.12) следует

$$\begin{aligned} & \hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_q) = \hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(\Omega, 0, \omega_3, \dots, \omega_p; \\ & \nu_1, \dots, \nu_q) = \hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(\Omega, \omega_2, 0, \omega_4, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_q) = \dots = \\ & = \hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(\Omega, \omega_2, \dots, \omega_{p-1}, 0; \nu_1, \dots, \nu_q) = \\ & = \hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(\Omega, \omega_2, \dots, \omega_p; 0, \nu_2, \dots, \nu_q) = \\ & = \hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(\Omega, \omega_2, \dots, \omega_p, \nu_1, 0, \nu_3, \dots, \nu_q) = \dots = \\ & = \hat{\kappa}_{p,q}^{\xi,\eta}(\Omega, \omega_2, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_{q-1}, 0). \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

Здесь обозначено $\Omega \equiv -\omega_2 - \omega_3 - \dots - \omega_p - \nu_1 - \nu_2 - \dots - \nu_q$. Закон составления соотношений (8.3.15) очевиден: ноль перемещается с места первого аргумента первой группы (на это место всегда ставится Ω) последовательно до места последнего аргумента последней группы. Напомним также, что внутри соответствующей группы аргументы можно перемещать как угодно.

Глава 9

ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ ОТ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

9.1. Производная случайного процесса

1. Как известно, для определения производной случайного процесса необходимо привлекать предельные операции над случайными функциями. Это, в свою очередь, требует рассмотрения сходимости последовательности случайных величин или функций, т. е. введения так называемой *стохастической сходимости*.

В математической литературе встречаются различные виды стохастической сходимости (см., например, [38, 54]). Так, говорят, что $\xi(t, \tau)$ сходится в *среднеквадратичном* к $\xi(t, \tau_0)$ при $\tau \rightarrow \tau_0$, если для всех t

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \langle [\xi(t, \tau) - \xi(t, \tau_0)]^2 \rangle = 0, \quad (9.1.1)$$

где $\xi(t, \tau)$ — случайная функция времени, а τ — некоторый параметр.

Говорят, что $\xi(t, \tau)$ сходится *по вероятности* к $\xi(t, \tau_0)$ при $\tau \rightarrow \tau_0$, если для всех t и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} P\{|\xi(t, \tau) - \xi(t, \tau_0)| \geq \varepsilon\} = 0. \quad (9.1.2)$$

Из сходимости в среднеквадратичном следует сходимость по вероятности (но не обратно).

Для целей прикладного анализа случайных процессов нет необходимости вдаваться в сравнение различных видов сходимости, а достаточно оперировать с общим понятием стохастической сходимости. Так, вместо (9.1.1), (9.1.2) будем записывать

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \xi(t, \tau) = \xi(t, \tau_0)$$

и называть $\xi(t, \tau_0)$ *стохастическим пределом* функции $\xi(t, \tau)$ при $\tau \rightarrow \tau_0$. При этом главное требование к выбору стохастической сходимости заключается в том, чтобы операция стохастического пре-

дела была *перестановочна* со статистическим усреднением, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\langle \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \xi(t, \tau) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \langle \xi(t, \tau) \rangle. \quad (9.1.3)$$

Как известно (см., например, [54]), этому требованию удовлетворяет, в частности, сходимость в среднеквадратичном.

2. Будем говорить, что $\eta(t)$ есть производная случайного процесса $\xi(t)$, если

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\xi(t + \tau) - \xi(t)] = \eta(t).$$

Другими словами, производной случайного процесса $\xi(t)$ называется стохастический предел

$$\frac{d\xi(t)}{dt} \equiv \dot{\xi}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\xi(t + \tau) - \xi(t)]. \quad (9.1.4)$$

Очевидно, что различным видам сходимости соответствуют различные определения производной.

9.2. Моментные и кумулянтные функции производных

1. Пусть случайный процесс задан набором моментных и кумулянтных функций. Поставим задачу отыскания моментных и кумулянтных функций его производных. Усредняя (9.1.4) и принимая во внимание (9.1.3), найдем

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\dot{\xi}}(t) &= \langle \dot{\xi}(t) \rangle = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\langle \xi(t + \Delta) \rangle - \langle \xi(t) \rangle}{\Delta} = \frac{d}{dt} \langle \xi(t) \rangle = \\ &= \frac{d\alpha_1^{\xi}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Аналогичные выкладки приводят к

$$\langle \dot{\xi}(t_1) \dot{\xi}(t_2) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle,$$

что эквивалентно

$$\alpha_2^{\dot{\xi}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \alpha_2^{\xi}(t_1, t_2).$$

В общем случае

$$\alpha_s^{\dot{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_s) = \frac{\partial^s \alpha_s^{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_s)}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_s}. \quad (9.2.1)$$

Таковы моментные функции производной случайного процесса. Если учесть, что

$$\frac{d\xi(t_1)}{dt_1} \frac{d\xi(t_2)}{dt_2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \xi(t_1) \xi(t_2),$$

$$\frac{d\xi(t_1)}{dt_1} \frac{d\xi(t_2)}{dt_2} \dots \frac{d\xi(t_s)}{dt_s} \equiv \frac{\partial^s}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_s} \xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_s),$$

то окажется, что операции дифференцирования и усреднения случайного процесса перестановочны:

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \xi(t_1) \xi(t_2) \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle,$$

$$\left\langle \frac{\partial^s}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_s} \xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_s) \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial^s}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_s} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_s) \rangle.$$

В этом нет ничего удивительного, поскольку операция дифференцирования есть линейная операция.

Перейдем теперь к кумулянтным функциям. Вторая кумулянтная функция производной равна

$$\langle \dot{\xi}(t_1), \dot{\xi}(t_2) \rangle = \langle \dot{\xi}(t_1) \dot{\xi}(t_2) \rangle - \langle \dot{\xi}(t_1) \rangle \langle \dot{\xi}(t_2) \rangle =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle \xi(t_1), \xi(t_2) \rangle.$$

Таким образом,

$$\kappa_2^{\dot{\xi}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \kappa_2^{\xi}(t_1, t_2).$$

В общем случае при произвольном s [16]:

$$\kappa_s^{\dot{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_s) = \frac{\partial^s \kappa_s^{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_s)}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_s}. \quad (9.2.2)$$

Подчеркнем, что совпадение формул дифференцирования моментных (9.2.1) и кумулянтных (9.2.2) функций также есть следствие линейности операции дифференцирования. Таким образом, операция дифференцирования перестановочна и с кумулянтной скобкой.

Используя полученные формулы многократно, легко найти выражение для моментных и кумулянтных функций n -й производной случайного процесса:

$$\alpha_s^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_s) = \frac{\partial^{sn} \alpha_s^{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_s)}{\partial t_1^n \partial t_2^n \dots \partial t_s^n},$$

$$\kappa_s^{\xi(n)}(t_1, t_2, \dots, t_s) = \frac{\partial^{sn} \kappa_s^{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_s)}{\partial t_1^n \partial t_2^n \dots \partial t_s^n}. \quad (9.2.3)$$

Моменты и кумулянты одномоментного распределения производной получаются отсюда приравниванием аргументов в левой и правой частях:

$$\begin{aligned} \alpha_s^{\xi(n)}(t) &= \left[\frac{\partial^{sn} \alpha_s^{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_s)}{\partial t_1^n \partial t_2^n \dots \partial t_s^n} \right]_{t_1=t_2=\dots=t_s=t}, \\ \kappa_s^{\xi(n)}(t) &= \left[\frac{\partial^{sn} \kappa_s^{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_s)}{\partial t_1^n \partial t_2^n \dots \partial t_s^n} \right]_{t_1=t_2=\dots=t_s=t}. \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Итак, для отыскания параметров даже одномоментного распределения производных необходимо знать многомоментное распределение самого случайного процесса.

2. Учитывая перестановочность оператора дифференцирования с кумулянтными и моментными скобками, легко найти моментные и кумулянтные функции и для совокупности любых производных любого числа случайных процессов:

$$\begin{aligned} <\xi_1^{(p_1)}(t_1) \xi_2^{(p_2)}(t_2) \dots \xi_N^{(p_N)}(t_N)> = \\ &= \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_N} <\xi_1(t_1) \xi_2(t_2) \dots \xi_N(t_N)>}{\partial t_1^{p_1} \partial t_2^{p_2} \dots \partial t_N^{p_N}}, \\ <\xi_1^{(p_1)}(t_1), \xi_2^{(p_2)}(t_2), \dots, \xi_N^{(p_N)}(t_N)> = \\ &= \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_N} <\xi_1(t_1), \xi_2(t_2), \dots, \xi_N(t_N)>}{\partial t_1^{p_1} \partial t_2^{p_2} \dots \partial t_N^{p_N}}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что (под ρ далее понимаются как моментные, так и кумулянтные функции)

$$\begin{aligned} \rho_{p,k}^{\xi(m), \xi(n)}(t_1, t_2, \dots, t_p; t_{p+1}, \dots, t_{p+k}) &= \\ &= \frac{\partial^{mp+nk} \rho_{p+k}^{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_{p+k})}{\partial t_1^m \dots \partial t_p^m \partial t_{p+1}^n \dots \partial t_{p+k}^n}, \\ \rho_{p,k}^{\xi(m)}(t_1, t_2, \dots, t_p; t_{p+1}, \dots, t_{p+k}) &= \\ &= \frac{\partial^{mp+nk} \rho_{p,k}^{\xi, \eta}(t_1, \dots, t_p; t_{p+1}, \dots, t_{p+k})}{\partial t_1^m \dots \partial t_p^m \partial t_{p+1}^n \dots \partial t_{p+k}^n}. \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Параметры одномоментного, двумоментного и т. д. распределений совокупности любых производных любого числа случайных

процессов получаются из найденных формул соответствующим приравниванием моментов времени в обеих частях формул, аналогично тому, как это сделано в (9.2.4).

3. Обратимся теперь к стационарным случайным процессам. Пусть $\xi(t)$ — сильно стационарный случайный процесс, моментные и кумулянтные функции которого $\rho_s^\xi(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)$ заданы ($\tau_k = t_k - t_1$). Чтобы перейти от частных производных d/dt_i к производным $d/d\tau_j$, необходимо произвести замену переменных $t_1, t_2, \dots, t_s$ на $t_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s$. Принимая во внимание, что в ρ_s^ξ переменная t_1 входит теперь только в виде разности $t_k - t_1$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = - \sum_{k=2}^s \frac{\partial}{\partial \tau_k}, \quad \frac{\partial}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial \tau_k}, \quad k = 2, 3, \dots, s. \quad (9.2.6)$$

Это приведет к тому, что, например, формулы (9.2.1), (9.2.2) примут вид

$$\begin{aligned} \rho_s^\xi(t_1, t_2, \dots, t_s) &= - \sum_{k=2}^s \frac{\partial}{\partial \tau_k} \frac{\partial^{s-1} \rho_s^\xi(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)}{\partial \tau_2 \partial \tau_3 \dots \partial \tau_s} \equiv \\ &\equiv \rho_s^\xi(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s). \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Таким образом, случайный процесс $\xi(t)$ также получился сильно стационарным. Следовательно, и $\xi^{(n)}(t)$ при любом n будет сильно стационарным процессом с моментными и кумулянтными функциями

$$\rho_s^{\xi^{(n)}}(0, \tau_2, \dots, \tau_s) = \left[- \sum_{k=2}^s \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right]^n \frac{\partial^{s-1} \rho_s^\xi(0, \tau_2, \dots, \tau_s)}{\partial \tau_2^n \partial \tau_3^n \dots \partial \tau_s^n}. \quad (9.2.8)$$

Сильно стационарной будет и совокупность производных $\{\xi^{(n)}(t), \xi^{(m)}(t)\}$.

Если случайный процесс лишь слабо стационарен, то слабо стационарными будут как любые производные случайного процесса, так и их совокупность.

Если имеется сильно стационарная совокупность N случайных процессов, то

$$\begin{aligned} \rho_{1, 1, \dots, 1}^{(\rho_1)} \rho_{2, 1, \dots, 1}^{(\rho_2)}, \dots, \rho_N^{(\rho_N)}(0; \tau_2; \dots; \tau_N) = \\ = \left[- \sum_{k=2}^N \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right]^{p_1} \frac{\partial^{p_2 + p_3 + \dots + p_N} \rho_{1, 1, \dots, 1}^{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N}(0; \tau_2; \tau_3; \dots; \tau_N)}{\partial \tau_2^{p_2} \partial \tau_3^{p_3} \dots \partial \tau_N^{p_N}}, \end{aligned}$$

Отсюда следует, что набор любых производных стационарной совокупности случайных процессов будет также стационарен.

Полагая в этой формуле $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_r = \xi$,

$$\xi_{r+1} = \xi_{r+2} = \dots = \xi_N = \eta, p_1 = p_2 = \dots = p_r = n, p_{r+1} = \dots = p_{r+2} = \dots = p_N = m,$$

получим для совокупности производных двух случайных процессов следующую формулу [ср. с (9.2.5)]:

$$\begin{aligned} \rho_{p,s}^{\xi(m), \eta(n)}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \tau_{p+1}, \dots, \tau_{p+s}) = \\ = \left[- \sum_{k=2}^{p+s} \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right]^m \frac{\partial^{m(p-1)+ns} \rho_{p,s}^{\xi, \eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \tau_{p+1}, \dots, \tau_s)}{\partial \tau_2^m \partial \tau_3^m \dots \partial \tau_p^m \partial \tau_{p+1}^n \dots \partial \tau_{p+k}^n}. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

4. Коммутативность оператора дифференцирования с моментными и кумулянтными скобками позволяет без труда получать формулы дифференцирования моментных и кумулянтных функций и по параметру, входящему в несколько аргументов этих функций.

Так элементарно, например, получаются следующие формулы для моментных скобок:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \xi(t) \eta(t) \rangle &= \left\langle \frac{d\xi(t)}{dt} \eta(t) \right\rangle + \left\langle \xi(t) \frac{d\eta(t)}{dt} \right\rangle, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \langle \xi_1(t) \xi_2(t) \dots \xi_N(t) \rangle &= \sum_{k=1}^N \left\langle \xi_1 \xi_2 \dots \frac{d\xi_k}{dt} \dots \xi_N \right\rangle. \end{aligned}$$

Эти же самые формулы справедливы и для кумулянтных скобок:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \xi(t), \eta(t) \rangle &= \left\langle \frac{d\xi(t)}{dt}, \eta(t) \right\rangle + \left\langle \xi(t), \frac{d\eta(t)}{dt} \right\rangle, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \langle \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t) \rangle &= \sum_{k=1}^N \left\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \frac{d\xi_k}{dt}, \dots, \xi_N \right\rangle. \end{aligned}$$

Если случайные процессы стационарны, то легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle \xi \eta \rangle &= \left\langle \xi \frac{d\eta}{d\tau} \right\rangle, \\ \frac{d}{d\tau} \langle \xi \xi \eta \rangle &= \left\langle \xi \frac{d\xi}{d\tau} \eta \right\rangle + \left\langle \xi \xi \frac{d\eta}{d\tau} \right\rangle, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{d\tau} \langle \xi_{1,\tau} \eta_{2,\tau} \dots \eta_{N,\tau} \rangle &= \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^N \left\langle \xi_{\eta_1, \tau} \cdots \eta_{(k-1), \tau} \frac{d\eta_{k, \tau}}{d\tau} \eta_{(k+1), \tau} \cdots \tau_{N, \tau} \right\rangle.$$

Заменяя и в этих выражениях точки на запятые, получим аналогичные формулы и для кумулянтных скобок:

[illegible]

9.3. О дифференцируемости случайного процесса

1. Обсудим теперь условия дифференцируемости случайного процесса, т. е. условия существования его производной.

Случайный процесс $\xi(t)$, называется *дифференцируемым в среднеквадратичном* в точке t , если (см., например, [38, 54])

$$\left[\frac{\partial^2 \alpha_{\frac{\xi}{2}}^{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right]_{t_1=t_2=t} = \alpha_{\frac{\xi}{2}}^{\xi}(t, t) = K_{\frac{\xi}{2}}[t, t] \quad (9.3.1)$$

существует и имеет конечную величину.

В том случае, когда случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным, (9.3.1) переходит в

$$\left[-\frac{d^2 \alpha_{\xi}^{\text{irr}}(0, \tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=0} = \left[-\frac{d^2 K_{\xi}[\tau]}{d\tau^2} \right]_{\tau=0} = \alpha_{\xi}^{\text{irr}}(0, 0) = K_{\xi}[0].$$

Учитывая, что $|K[\tau]| \leq K[0]$, мы получаем, что случайный стационарный процесс будет дифференцируемым в среднеквадратичном, если корреляционная функция его производной существует и конечна для всех τ .

2. Нетрудно убедиться в том, что случайные стационарные процессы с корреляционными функциями

$$K[\tau] = A^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}, \quad K[\tau] = A^2 e^{-a|\tau|} \left| \cos \omega \tau + \frac{a}{\omega} \sin \omega |\tau| \right|,$$

являются дифференцируемыми в среднеквадратичном. В то же время случайные процессы с корреляционными функциями

$$K[\tau] = A^2 e^{-a|\tau|}, \quad (9.3.2)$$

$$K[\tau] = \mathcal{D} \delta(\tau), \quad (9.3.3)$$

$$K[\tau] = A^2 \begin{cases} (1 - |\tau|/\tau_0), & 0 \leq |\tau| \leq \tau_0 \\ 0, & |\tau| \geq \tau_0 \end{cases} \quad (9.3.4)$$

не дифференцируемы в среднеквадратичном, поскольку в некоторых точках вторые производные корреляционных функций (9.3.2) — (9.3.4) обращаются в бесконечность.

Вместе с тем, эти корреляционные функции имеют, как уже говорилось, ранее, широкое употребление и адекватно представляют многие реальные случайные процессы. При этом часто возникают такие ситуации, когда процессы, претерпевая различные преобразования, при их прохождении через различные динамические системы подвергаются дифференцированию, и поэтому их производная столь же физически реальна, сколь и они сами. В этой связи становится очевидной необходимость «приобщения» подобных случайных процессов к «хорошим», т. е. к тем, которые можно было бы дифференцировать хотя бы в каком-нибудь смысле. Так возникает проблема расширения понятия дифференцируемости случайного процесса.

3. Разберемся в причинах недифференцируемости случайного процесса. Согласно введенному определению дифференцируемости производная случайного процесса существует, если ее средний квадрат конечен. Поскольку производная сама есть случайный процесс, то это значит, что существование какого-либо случайного процесса мы связываем с конечностью его среднего квадрата.

Нетрудно видеть, что такое толкование существования случайного процесса весьма ограничено и заведомо не может нас удовлетворить. В самом деле, если придерживаться этого определения, то мы не можем считать существующим, например, дельта-коррелированный процесс с корреляционной функцией $\mathcal{D} \delta(\tau)$, поскольку его средний квадрат бесконечен. Тем самым, чтобы не впасть в противоречие, мы не имеем права работать с белым шумом и одновременно пользоваться дифференцируемостью в среднеквадратичном.

Если теперь обратиться к случайным процессам с корреляционными функциями (9.3.2), (9.3.4), то легко понять, что их недифференцируемость связана с тем, что в составе корреляционных функций их производных опять же будет присутствовать дельта-функция, т. е. будет присутствовать белый шум. Следовательно, мы должны отказаться от ограничения, налагаемого дифференцируемостью в среднеквадратичном, если мы хотим сохранить возможность оперирования с белым шумом и связанными с ним процессами.

4. Будем считать случайный процесс существующим и тогда, когда его моментные и кумулянтные функции, будучи сингулярными, могут быть выражены через дельта-функции и их производные. В соответствии с этим будем говорить, что случайный процесс *дифференцируем в обобщенном смысле* [4], если корреляционная функция его производной, будучи сингулярной, содержит дельта-

функцию или ее производные. Такого обобщения дифференцируемости и существования случайных процессов совершенно достаточно для большинства прикладных задач, с которыми приходится сталкиваться, ибо все встречающиеся сингулярности, как правило, сводятся к дельта-функции и ее производным.

Пример 9.3.1. Пусть случайный процесс представлен корреляционной функцией (9.3.2). Тогда первая производная его корреляционной функции терпит разрыв при $\tau = 0$ и, следовательно, вторая производная в этой точке не существует, обращаясь в минус бесконечность. Вместе с этим, в точке $\tau = 0$ вторая производная, а следовательно, и $K_{\xi}''[\tau]$ может быть представлена дельта-функцией:

$$K_{\xi}''[\tau] = 2aA^2 \delta(\tau) - a^2 A^2 e^{-a|\tau|}.$$

Таким образом, случайный процесс с корреляционной функцией (9.3.2) как и белый шум, дифференцируемы в обобщенном смысле сколь угодно раз.

Пример 9.3.2. Рассмотрим случайный процесс с корреляционной функцией (9.3.4). Несмотря на то, что первая производная этой функции испытывает скачки, а вторая обращается в бесконечность в трех точках: $\tau = -\tau_0$, $\tau = 0$, $\tau = \tau_0$, последняя может быть выражена через дельта-функции:

$$K_{\xi}'[\tau] = \frac{2A^2}{\tau_0} \delta(\tau) - \frac{A^2}{\tau_0} [\delta(\tau + \tau_0) + \delta(\tau - \tau_0)].$$

Следовательно, случайный процесс с корреляционной функцией (9.3.4) также дифференцируем в обобщенном смысле сколь угодно раз.

9.4. Спектральные характеристики производных

1. Перейдем теперь к анализу спектральных плотностей производных случайных стационарных процессов. Выполняя преобразование Фурье корреляционной функции n -й производной случайного процесса и используя свойства преобразования Фурье, получим

$$S_{\xi^{(n)}}(\omega) = (-1)^n \mathcal{F}_c \left\{ \frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}} K_{\xi}[\tau]; \omega\tau \right\} = \omega^{2n} S_{\xi}(\omega). \quad (9.4.1)$$

Совместная спектральная плотность производных стационарно связанных случайных процессов на основании (8.2.3) равна

$$\begin{aligned} S_{\xi^{(n)}\eta^{(m)}}(\omega) &= (-1)^n \mathcal{F} \left\{ \frac{d^{n+m}}{d\tau^{n+m}} K_{\xi\eta}[\tau]; -\omega\tau \right\} = \\ &= \omega^{n+m} \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{\frac{n+m}{2}} S_{\xi\eta}(\omega), && \text{если } n+m - \text{четно} \\ &(-1)^{\frac{n+m+1}{2}} (-j) S_{\xi\eta}(\omega), && \text{если } n+m - \text{нечетно} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

2. Спектральные плотности производных могут быть вычислены довольно просто, если воспользоваться символическим методом.

Этот метод имеет широкое применение и весьма прост в употреблении.

Пусть имеется стационарный случайный процесс $\xi(t)$. Образовав произведение *коэффициента Фурье*

$$\hat{\xi}(\omega) \equiv \mathcal{F}\{\xi(t); -\omega t\}$$

на комплексно-сопряженную величину и усредняя его, получим $\langle \hat{\xi}(\omega) \hat{\xi}^*(\omega) \rangle$. Это выражение обладает свойствами спектральной плотности $S_{\xi}(\omega)$, хотя, разумеется, ей не равно. Совершенно аналогично среднее $\langle \hat{\xi}(\omega) \hat{\eta}^*(\omega) \rangle$ обладает свойствами совместной спектральной плотности $S_{\xi\eta}(\omega)$.

Символический метод заключается в замене указанных средних спектральными плотностями:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}(\omega) \hat{\xi}^*(\omega) \rangle &\rightarrow S_{\xi}(\omega), \\ \langle \hat{\xi}(\omega) \hat{\eta}^*(\omega) \rangle &\rightarrow S_{\xi\eta}(\omega). \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

3. Проиллюстрируем символический метод двумя примерами.

Пример 9.4.1. На основании свойств преобразований Фурье

$$\hat{\xi}^{(n)}(\omega) \equiv \mathcal{F}\{\xi^{(n)}(t); -\omega t\} = (j\omega)^{(n)} \hat{\xi}(\omega). \quad (9.4.4)$$

Отсюда

$$\hat{\xi}^{(n)}(\omega) [\hat{\eta}^{(m)}(\omega)]^* = (j\omega)^n \hat{\xi}(\omega) (-j\omega)^m \hat{\eta}^*(\omega) = (j\omega)^n (-j\omega)^m \hat{\xi}(\omega) \hat{\eta}^*(\omega).$$

Совершая усреднение и используя замену (9.4.3), получаем формулу

$$S_{\xi^{(n)}\eta^{(m)}}(\omega) = (j\omega)^n (-j\omega)^m S_{\xi\eta}(\omega) = \omega^{n+m} (j)^n (-j)^m S_{\xi\eta}(\omega), \quad (9.4.5)$$

полностью совпадающую, как легко проверить с (9.4.2).

Если $\eta = \xi$, $m = n$, то (9.4.5) переходит в (9.4.1).

Пример 9.4.2. Пусть случайный процесс равен

$$\zeta(t) = \xi(t) + \frac{d\eta(t)}{dt},$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — стационарно связанные случайные процессы. Найдем спектральную плотность $S_{\zeta}(\omega)$. Имеем

$$\hat{\zeta}(\omega) = \hat{\xi}(\omega) + j\omega \hat{\eta}(\omega).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(\omega) \hat{\zeta}^*(\omega) &= \hat{\xi}(\omega) \hat{\xi}^*(\omega) - j\omega \hat{\xi}(\omega) \hat{\eta}^*(\omega) + j\omega \hat{\eta}(\omega) \hat{\xi}^*(\omega) + \\ &+ \omega^2 \hat{\eta}(\omega) \hat{\eta}^*(\omega). \end{aligned}$$

Усредняя и совершая замену (9.4.3), получаем

$$S_{\zeta}(\omega) = S_{\xi}(\omega) - j\omega S_{\xi\eta}(\omega) + j\omega S_{\eta\xi}(\omega) + \omega^2 S_{\eta}(\omega).$$

Итак,

$$S_{\zeta}(\omega) = S_{\xi}(\omega) - 2\omega S_{\xi\eta}^1(\omega) + \omega^2 S_{\eta}(\omega).$$

Таким образом, возникла еще одна ситуация (кроме рассмотренной в примере 8.2.2), в которой необходимо учитывать нечетную

совместную спектральную плотность. Слагаемое $2 \omega S_{\xi\eta}^1(\omega)$ играет роль интерференционного члена, дающего дополнительный вклад в спектр при сложении случайного процесса с производной другого процесса.

Интересно отметить, что если рассматривать сумму случайного процесса с его собственной производной

$$\xi(t) = \xi(t) + \frac{d}{dt} \xi(t),$$

то в спектре интерференционного члена не будет из-за некоррелированности $\xi(t)$ и $d\xi(t)/dt$, взятых в один и тот же момент времени. Интерференционный член появится, однако, если ввести временной сдвиг:

$$\xi(t) = \xi(t + \tau_0) + \frac{d\xi(t)}{dt}.$$

В этом случае

$$S_{\xi}(\omega) = (1 + 2 \omega \sin \omega \tau_0 + \omega^2) S_{\xi}(\omega).$$

4. Рассмотрим теперь высшие спектры производных стационарного случайного процесса. На основании (9.2.7) кумулянтная функция производной равна

$$\kappa_s^{\dot{\xi}}(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = - \sum_{k=2}^s \frac{\partial}{\partial \tau_k} \frac{\partial^{s-1} \kappa_s^{\xi}(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)}{\partial \tau_2 \partial \tau_3 \dots \partial \tau_s}.$$

Согласно (8.3.5) дифференцирование кумулянтной функции по τ_k эквивалентно умножению спектральной плотности на $j\omega_k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_s^{\dot{\xi}}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) &= \\ &= (-j)^s (\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_s) \omega_2 \omega_3 \cdot \dots \cdot \omega_s \times \\ &\times \hat{\kappa}_s^{\xi}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s). \end{aligned} \quad (9.4.6)$$

Итак, мы нашли закон преобразования спектральных плотностей высших порядков при дифференцировании стационарного случайного процесса.

5. Заметим вместе с тем, что для спектральных плотностей $G_{p,q}(\omega)$ мы не получим простого соотношения подобного (9.4.6), ибо спектральная плотность $G_{p,q}^{\dot{\xi}}(\omega)$ не может быть выражена (кроме случая $p = q = 1$) через $G_{p,q}^{\xi}(\omega)$. Это связано с тем, что кумулянтные функции $\kappa_{p+q}^{\dot{\xi}}(0^{[p]}, \tau^{[q]})$ не могут быть найдены дифференцированием $\kappa_{p+q}^{\xi}(0^{[p]}, \tau^{[q]})$ по τ . Поэтому, чтобы определить $G_{p,q}^{\dot{\xi}}(\omega)$, следует сначала вычислить $\hat{\kappa}_s^{\dot{\xi}}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$, а затем интегрировать эту спектральную плотность в соответствии с (8.3.10). Эта ситуация обусловлена тем, что набор спектральных плотностей $G_{p,q}(\omega)$ в отличие от набора $\hat{\kappa}_s$ не является исчерпывающей характеристикой случайного процесса.

Используя (9.4.6) многократно, легко записать высшие спектральные плотности любых производных стационарного случайного процесса

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_s^{\xi(n)}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) &= (-1)^n j^{sn} (\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_s)^n \omega_2^n \omega_3^n \dots \\ &\dots \cdot \omega_s^n \hat{\kappa}_s^{\xi}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s). \end{aligned}$$

6. Рассматривая совокупность двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, можем записать на основании (9.2.9) следующие значения совместных кумулянтных функций производных:

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \tau_{p+1}, \dots, \tau_{p+s}) &= \\ &= - \sum_{k=2}^{p+s} \frac{\partial}{\partial \tau_k} \frac{\partial^{p-1} \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \tau_{p+1}, \dots, \tau_{p+s})}{\partial \tau_2 \partial \tau_3 \dots \partial \tau_p}, \\ \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \tau_{p+1}, \dots, \tau_{p+s}) &= \\ &= \frac{\partial^s \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \tau_2, \dots, \tau_p; \tau_{p+1}, \dots, \tau_{p+s})}{\partial \tau_{p+1} \partial \tau_{p+2} \dots \partial \tau_{p+s}}. \end{aligned}$$

Согласно (8.3.13) дифференцированию совместной кумулянтной функции по τ_k соответствует умножение совместной спектральной плотности на $j\omega_k$ или на $j\nu_k$ (если τ_k относится ко второй группе аргументов). Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_s) &= -j^p (\omega_2 + \omega_3 + \\ &+ \dots + \omega_p + \nu_1 + \dots + \nu_s) \times \\ &\times \omega_2 \omega_3 \cdot \dots \cdot \omega_p \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_s), \\ \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_s) &= \\ &= j^s \nu_1 \nu_2 \dots \nu_s \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_s). \end{aligned} \quad (9.4.7)$$

Используя (9.4.7) многократно, получим общую формулу для высших совместных спектральных плотностей любых производных стационарной совокупности случайных процессов

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi(n), \eta(m)}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_p; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s) &= \\ &= (-1)^n j^{pn+sm} (\omega_2 + \dots + \omega_p + \nu_1 + \dots + \nu_s)^n \omega_2^n \omega_3^n \dots \\ &\dots \cdot \omega_p^n \nu_1^m \nu_2^m \dots \nu_s^m \hat{\kappa}_{p,s}^{\xi,\eta}(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_p; \nu_1, \dots, \nu_s). \end{aligned}$$

9.5. Интеграл от случайного процесса

1. Часто возникает необходимость рассмотрения интегралов

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= \int_a^b \varphi(t, u) \xi(u) du, \\ \eta_2(t) &= \int_a^t \varphi(t, u) \xi(u) du,\end{aligned}\tag{9.5.1}$$

где $\varphi(t, u)$ — некоторая детерминированная ограниченная кусочно-непрерывная функция, а $\xi(u)$ — заданный случайный процесс. Эти интегралы могут быть введены как стохастические пределы соответствующих сумм (см., например, [3, 38, 51, 54]), причем различными способами в соответствии с различными определениями стохастического предела. Если интегралы (9.5.1) определить в среднеквадратичном, то необходимым и достаточным условием их существования (см., например, [54]) явится сходимость интегралов

$$\begin{aligned}&\int_a^b \int_a^b \varphi(t, u_1) \varphi(t, u_2) K_\xi[u_1, u_2] du_1 du_2, \\ &\int_a^t \int_a^t \varphi(t, u_1) \varphi(t, u_2) K_\xi[u_1, u_2] du_1 du_2\end{aligned}\tag{9.5.2}$$

для любых t . Эта сходимость заключается в конечности средних квадратов $\langle \eta_1^2(t) \rangle$, $\langle \eta_2^2(t) \rangle$. В случае их бесконечных значений мы будем говорить о существовании $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ в обобщенном смысле, если величины (9.5.2) могут быть представлены через дельта-функции или их производные. Если интегралы (9.5.2) расходятся, но могут быть суммированы, то мы опять-таки будем говорить о существовании $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ в обобщенном смысле.

Существование случайных процессов (9.5.1) позволяет (см., например, [51, 54]) менять местами интегрирование и усреднение, т. е. операция интегрирования, так же как и операция дифференцирования, коммутирует с усреднением.

2. Интегралы (9.5.1) можно рассматривать как некоторые линейные преобразования случайного процесса $\xi(t) \rightarrow \eta(t)$. Такой подход к интегралам развивается далее (см. гл. 11 — 13).

В данном параграфе мы остановимся только на одном частном случае $\varphi(t, u) \equiv 1$, когда оба интеграла (9.5.1) можно объединить в один, рассматривая

$$\eta(T) = \int_a^T \xi(u) du\tag{9.5.3}$$

как случайную функцию параметра T .

Если параметром T является время ($T = t$), то (9.5.3) есть случайный процесс, равный интегралу от $\xi(t)$. Если $T = b$ не зависит от времени, то (9.5.3) является случайной величиной, зависящей от a и b .

3. Используя коммутруемость операций интегрирования и усреднения, легко записать моментные функции для $\eta(T)$:

$$\alpha_s^\eta(T_1, T_2, \dots, T_s) = \int_a^{T_1} \int_a^{T_2} \dots \int_a^{T_s} \alpha_s^\xi(u_1, u_2, \dots, u_s) du_1 du_2 \dots du_s. \quad (9.5.4)$$

Аналогичное выражение будет иметь место и для кумулянтных функций [16]:

$$\kappa_s^\eta(T_1, T_2, \dots, T_s) = \int_a^{T_1} \int_a^{T_2} \dots \int_a^{T_s} \kappa_s^\xi(u_1, u_2, \dots, u_s) du_1 du_2 \dots du_s. \quad (9.5.5)$$

Легко понять, что формулы (9.5.4), (9.5.5) представляют собой, по существу, интегралы от (9.2.1), (9.2.2) (где следует положить $\xi = \eta$, $\xi = \xi$), взятые при начальных условиях $\rho_s^\eta(a, a, \dots, a) = 0$, что соответствует начальному условию $\eta(a) = 0$. Здесь через $\rho_s(t_1, t_2, \dots, t_s)$ мы опять обозначаем как моментные, так и кумулянтные функции.

То, что при дифференцировании и интегрировании случайного процесса его моментные и кумулянтные функции также претерпевают аналогичные преобразования, является следствием линейности этих операций. Другим очевидным следствием линейности операций дифференцирования и интегрирования является сохранение кумулянтности случайного процесса. Так, производная и интеграл от нормально распределенного случайного процесса сами имеют нормальное распределение, равно как неизменными остаются и все другие модельные распределения.

4. Если $T_1 = T_2 = \dots = T_s = b$, то (9.5.4), (9.5.5) дают следующие выражения s -го момента и кумулянта случайной величины:

$$\rho_s^\eta = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \rho_s^\xi(u_1, u_2, \dots, u_s) du_1 du_2 \dots du_s.$$

Пусть теперь $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс, тогда моментные и кумулянтные функции $\eta(t)$ равны

$$\rho_s^\eta(t_1, t_2, \dots, t_s) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_s} \rho_s^\xi(0, u_2 - u_1, u_3 - u_1, \dots, u_s - u_1) du_1 du_2 \dots du_s.$$

Неопределенный интеграл от случайного стационарного процесса уже не будет стационарным процессом.

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

10.1. Определение марковского процесса

1. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ и зафиксируем некоторые моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_N$. Вероятность того, что значение $\xi_N = \xi(t_N)$ лежит в интервале $[x_N, x_N + dx_N]$, если в момент t_1 случайный процесс имел значение x_1 , в момент t_2 — значение x_2 , ..., в момент t_{N-1} — значение x_{N-1} , равна произведению условной плотности вероятности на длину интервала:

$$W(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_{N-1}, t_{N-1} | x_N, t_N) dx_N.$$

Если рассматривать произвольный случайный процесс, то для него указанная вероятность, вообще говоря, зависит от $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$. Это приводит к определенной «временной связанности» процесса, к существованию для него сильного последствия, в конечном счете, к более точному отражению особенностей реальных случайных процессов (например, их «гладкости»). Однако математический анализ таких процессов сильно усложняется, вплоть до практически полной безнадежности их глубокого и подробного исследования. По этой причине практически интересны своего рода «компромиссные» модели случайных процессов, которые достаточно просты в анализе и в то же время вполне удовлетворительно описывают реальные процессы. Вот такими случайными процессами, получившими широкое распространение и обоснованное признание, и являются *марковские процессы*.

Случайный процесс называется марковским, если его условная плотность вероятности зависит только от x_{N-1} и не зависит от значений, принятых процессом во все предыдущие моменты времени. Другими словами, вероятность тех или иных значений марковского процесса в последующие моменты времени зависит только от значения, принимаемого процессом в настоящий момент, и совершенно не зависит от всей его предыстории.

2. С марковскими процессами тесно связано понятие *вероятности переходов*. Само по себе это понятие было введено в физике вне всякой связи с математической теорией случайных процессов и относилось к такой физической системе, состояние которой в заданный момент времени полностью определяло ее последующую эволюцию. Под вероятностью переходов понималась вероятность перехода системы из состояния x_1 , имеющего место в момент t_1 , в состояние x_2 в последующий момент времени t_2 . Однако не для всякой системы, подверженной случайным переходам, можно было ввести понятие вероятности переходов. Здесь существенной была независимость вероятности последующего перехода от всей предыстории состояний системы. Таким образом, понятие вероятности переходов суще-

существует только для таких систем, имеющее состояние которых *исчерпывающим образом* определяет вероятности последующих переходов.

Поскольку для марковского процесса

$$W(x_1, t_1; \dots, x_{N-1}, t_{N-1} | x_N, t_N) = W(x_{N-1}, t_{N-1} | x_N, t_N), \quad (10.1.1)$$

то очевидно, что условная плотность вероятности, стоящая в правой части, есть не что иное, как *плотность вероятности переходов*, которую мы, в отличие от условной плотности вероятности, будем отмечать знаком «тильда» сверху. Итак, для марковского процесса

$$W(x_{N-1}, t_{N-1} | x_N, t_N) = \tilde{W}(x_{N-1}, t_{N-1} | x_N, t_N). \quad (10.1.2)$$

Для немарковского случайного процесса, для которого, разумеется, также существует условная плотность вероятности $W(x_{N-1}, t_{N-1} | x_N, t_N)$, соотношение (10.1.2) не имеет места.

3. Поскольку любое многомерное распределение может быть записано через условные плотности вероятности [см. (6.1.2)], постольку многомоментное распределение марковского процесса на основании (10.1.1), (10.1.2) выражается через одномоментную плотность вероятности и плотность вероятности переходов:

$$\begin{aligned} W(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_N, t_N) &= \\ &= W(x_1, t_1) \prod_{k=2}^N \tilde{W}(x_{k-1}, t_{k-1} | x_k, t_k). \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

С другой стороны, марковские процессы полностью описываются и двумоментной плотностью вероятности

$$W(x_1, t_1; x_2, t_2) = W(x_1, t_1) \tilde{W}(x_1, t_1 | x_2, t_2).$$

Марковский процесс называется *однородным во времени*, если вероятность переходов зависит только от разности моментов времени:

$$\tilde{W}(x_1, t_1 | x_2, t_2) \equiv \tilde{W}(x_1 | x_2, t_2 - t_1).$$

Если к тому же $W(x_1, t_1) \equiv W(x_1)$, то мы приходим к *стационарному* марковскому процессу.

10.2. Уравнение Смолуховского

1. Существует еще одно условие, позволяющее безошибочно отличать плотность вероятности переходов от условной плотности вероятности. Как известно (см., например, [7, 55]), плотность вероятности переходов произвольного марковского процесса удовлет-

воряет так называемому *уравнению Смолуховского*:

$$\widetilde{W}(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{W}(x_1, t_1 | x_2, t_2) \widetilde{W}(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2, \quad (10.2.1)$$

записанному для трех моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$. Это уравнение может служить, по существу, *определением* $\widetilde{W}$, ибо только тогда условная плотность вероятности может считаться некоторой плотностью вероятности переходов, когда она удовлетворяет уравнению (10.2.1).

2. Следует заметить, что уравнение Смолуховского может быть интерпретировано как формула полной вероятности для перехода системы из состояния x_1 в состояние x_3 . В этой связи возникает законный вопрос, почему же этому уравнению не удовлетворяет произвольная условная плотность вероятности, поскольку соотношение

$$W(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, t_1 | x_2, t_1) W(x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2$$

также можно понимать как формулу полной вероятности? Дело в том, что для немарковского процесса второй множитель под знаком интеграла будет зависеть еще и от x_1, t_1 , и это уравнение не будет уже уравнением, связывающим одну и ту же функцию W . Другими словами, для немарковского процесса формулу полной вероятности следует записывать в виде

$$W(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, t_1 | x_2, t_2) W(x_1, t_1; x_2, t_2 | x_3, t_3) dx_2.$$

3. Если рассмотреть условную плотность вероятности гауссова процесса

$$W(x_1 | x_2, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 [1 - R^2(\tau)]}} \exp \left\{ -\frac{[x_2 - x_1 R(\tau)]^2}{2\sigma^2 [1 - R^2(\tau)]} \right\}, \quad (10.2.2)$$

то из уравнения Смолуховского мы найдем единственный вид коэффициента корреляции $R[\tau] = \exp(-\alpha|\tau|)$, при котором (10.2.2) будет плотностью вероятности переходов. Это значит, что только таким коэффициентом корреляции может обладать стационарный гауссов марковский процесс [51].

10.3. Кинетические уравнения марковского процесса

1. Итак, основной особенностью марковского процесса является то, что вероятность перехода из состояния x_1 в состояние $[x_2, x_2 + dx_2]$ зависит только от x_1 . Это обстоятельство приводит к тому, что задание одномоментной плотности вероятности марков-

ского процесса в $t = t_1$ позволяет определить ее и для любого $t > t_1$. В самом деле, если известна $W(x_1, t_1)$ и плотность вероятности переходов $W(x_1, t_1 | x, t)$ (знак « $\sim$ » будем далее опускать),

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, t_1) W(x_1, t_1 | x, t) dx_1. \quad (10.3.1)$$

Таким образом, одномоментное распределение марковского процесса, заданное в момент t , полностью определяет все его дальнейшее развитие. Это значит, что и временная производная плотности вероятности, рассматриваемая в момент t , должна также определяться лишь самой плотностью вероятности в тот же момент времени t . Другими словами, должно иметь место уравнение

$$\partial W(x, t) / \partial t = \hat{L}(x, t) W(x, t), \quad (10.3.2)$$

где $\hat{L}(x, t)$ — некоторый дифференциальный оператор, действующий на координату x . Этот оператор является линейным по отношению к $W(x, t)$ в силу линейности уравнения (10.3.1). Назовем этот оператор *кинетическим оператором* марковского процесса. Задаваясь начальными условиями для $W(x, t)$ и решая уравнение (10.3.2), можно определить всю эволюцию одномоментного распределения. Таким образом, (10.3.2) есть *кинетическое уравнение* марковского процесса.

При начальном условии $W(x, t_0) = \delta(x - x_0)$ решение уравнения (10.3.2) автоматически дает плотность вероятности переходов $W(x_0, t_0 | x, t)$. Следовательно, эта плотность вероятности также удовлетворяет тому же самому кинетическому уравнению

$$\frac{\partial W(x_0, t_0 | x, t)}{\partial t} = \hat{L}(x, t) W(x_0, t_0 | x, t) \quad (10.3.3)$$

с начальным условием $W(x_0, t_0 | x, t_0) = \delta(x - x_0)$.

Уравнение (10.3.2) может быть получено и непосредственно из (10.2.1), ибо оно представляет, по существу, дифференциальную форму уравнения Смолуховского (см., например, [5, 6]). При этом оказывается, что дифференциальный оператор $\hat{L}(x, t)$ равен в общем случае [5, 6]

$$\hat{L}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_n(x, t), \quad (10.3.4)$$

где

$$K_n(x, t) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle [x(t+\tau) - x(t)]^n \rangle_{\text{усл}}}{\tau} \quad (10.3.5)$$

будем называть *кинетическими коэффициентами* марковского процесса. Здесь усреднение производится по ансамблю реализаций, соответствующему вероятности переходов, т. е.

$$\langle [x(t+\tau) - x(t)]^n \rangle_{\text{усл}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [x_\tau - x]^n W(x, t | x_\tau, t + \tau) dx_\tau. \quad (10.3.6)$$

Другими словами, полагая, что $x(t) = x$ является фиксированным, мы усредняем $[x_\tau - x]^n$ по всевозможным значениям $x_\tau = x(t + \tau)$.

Итак, произвольный марковский процесс описывается уравнениями (10.3.2), (10.3.3) с кинетическим оператором (10.3.4).

Наряду с уравнением (10.3.3) из уравнения Смолуховского можно получить и «обратное» уравнение для плотности вероятности переходов, в котором производные берутся по «начальным» координатам:

$$-\frac{\partial W(x_0, t_0 | x, t)}{\partial t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n(x_0, t_0)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_0^n} W(x_0, t_0 | x, t).$$

Другими словами, плотность вероятности переходов как функция начальных переменных удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial W(x_0, t_0 | x, t)}{\partial t_0} = \hat{M}(x_0, t_0) W(x_0, t_0 | x, t),$$

где оператор $\hat{M}(x, t)$, очевидно, тесно связан с $\hat{L}(x, t)$.

Нетрудно показать, что операторы $\hat{L}$ и $\hat{M}$ являются сопряженными, т. е. такими, для которых справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \hat{L}(x) f_2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) \hat{M}(x) f_1(x) dx,$$

если хотя бы одна из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ обращается вместе со всеми своими производными в нуль при $x = \pm \infty$. Поэтому в последующем, вводя знак сопряжения, будем записывать $\hat{M}(x, t) \equiv \hat{L}^+(x, t)$, где

$$\hat{L}^+(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n(x, t)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n}. \quad (10.3.7)$$

Таким образом, обратное кинетическое уравнение принимает вид

$$-\frac{\partial W(x_0, t_0 | x, t)}{\partial t_0} = \hat{L}^+(x_0, t_0) W(x_0, t_0 | x, t). \quad (10.3.8)$$

2. Марковский случайный процесс называется *непрерывным* если $K_n(x, t) \equiv 0$ для всех $n \leq 3$. Для непрерывного марковского процесса кинетическое уравнение (10.3.3) принимает вид *уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка* (ЭФП) [6, 7].

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x_0, t_0 | x, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [K_1(x, t) W(x_0, t_0 | x, t)] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x, t) W(x_0, t_0 | x, t)]. \end{aligned}$$

Это же уравнение часто называют *прямым* уравнением Колмогорова.

Для непрерывного марковского процесса кинетическое уравнение (10.3.8)

$$-\frac{\partial W(x_0, t_0 | x, t)}{\partial t_0} = K_1(x_0, t_0) \frac{\partial W(x_0, t_0 | x, t)}{\partial x_0} + \\ + \frac{1}{2} K_2(x_0, t_0) \frac{\partial^2 W(x_0, t_0 | x, t)}{\partial x_0^2}$$

называется *обратным* уравнением Колмогорова [34, 42, 51], сопряженным прямому.

Непрерывность марковского процесса, как это следует из (10.3.5), означает, что $\langle (\Delta x_\tau)^n \rangle$ для $n \geq 3$ при $\tau \rightarrow 0$ стремится к нулю быстрее, чем τ . Это значит, что большие отклонения случайного процесса за малое время τ существенно менее вероятны, чем малые отклонения (см. подробнее [7]).

3. Кинетические коэффициенты однородного во времени марковского процесса согласно (10.3.5), (10.3.6) не зависят от времени: $K_n(x, t) = K_n(x)$. Вследствие этого $\hat{L}(x, t) = \hat{L}(x)$.

Если $K_n(x, t) = K_n(t)$, марковский процесс называется *однородным в пространстве*. Для него $\hat{L}(x, t) = \hat{L}(t)$.

Если существует отличный от тождественного нуля предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t) \equiv W_{\text{ст}}(x),$$

то говорят о существовании *стационарной* плотности вероятности марковского процесса.

4. В заключение параграфа представим временную производную двумomentного распределения марковского процесса через введенные выше операторы. Умножая обе части (10.3.2) на $W(x_0, t_0)$, найдем

$$\frac{\partial W(x_0, t_0; x, t)}{\partial t} = \hat{L}(x, t) W(x_0, t_0; x, t).$$

Таким образом, для двумomentной плотности вероятности марковского процесса мы получили то же самое кинетическое уравнение. Для стационарного марковского процесса

$$\frac{\partial W(x_0; x, \tau)}{\partial \tau} = \hat{L}(x) W(x_0; x, \tau). \quad (10.3.9)$$

10.4. Свойства приращений марковского процесса

1. Так как задание вероятностного распределения марковского процесса полностью определяет его последующее развитие, то легко понять, что приращения марковского процесса должны иметь какие-то особенности.

Пусть имеется марковский случайный процесс $\xi(t)$ с одномоментным распределением $W_{\xi}(x, t)$ и с плотностью вероятности переходов $W_{\xi}(x_1, t_1 | x_2, t_2)$. Образует приращение $\eta(t_2, t_1) = \xi(t_2) - \xi(t_1)$, где $t_1 < t_2$. Вероятностное распределение этого приращения равно

$$\begin{aligned} W_{\eta}(y, t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x_1, t_1; x_1 + y, t_2) dx_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x_1, t_1) W_{\xi}(x_1, t_1 | x_1 + y, t_2) dx_1. \end{aligned} \quad (10.4.1)$$

Пусть теперь значение $\xi(t_1) \equiv \xi_0(t_1) \equiv x_1^0$ является фиксированным (детерминированным). В этом случае $W_{\xi}(x_1, t_1) = \delta(x_1 - x_1^0)$. Такое приращение будем называть *локальным* и обозначать $\tilde{\eta} \equiv \xi(t_2) - x_1^0$. Из (10.4.1) находим, что распределение локального приращения марковского процесса есть не что иное, как вероятность переходов:

$$W_{\tilde{\eta}}(y; x_1^0, t_1, t_2) = W_{\xi}(x_1^0, t_1 | x_1^0 + y, t_2). \quad (10.4.2)$$

Эта формула с несколько другой стороны поясняет смысл вероятности переходов.

2. Полученное выражение (10.4.2) позволяет записать многомерное распределение марковского процесса (10.1.3) в виде

$$\begin{aligned} W_{\xi}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N) &= W_{\xi}(x_1, t_1) \prod_{k=2}^N W_{\tilde{\eta}}(x_k - \\ &- x_{k-1}; x_{k-1}^0, t_{k-1}, t_k). \end{aligned}$$

Записывая локальные приращения за неперекрывающиеся интервалы времени

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_2 &= \xi(t_2) - \xi_0(t_1) = \xi(t_2) - x_1^0, \\ \tilde{\eta}_l &= \xi(t_l) - \xi_0(t_{l-1}) = \xi(t_l) - x_{l-1}^0, \\ \tilde{\eta}_N &= \xi(t_N) - \xi_0(t_{N-1}) = \xi(t_N) - x_{N-1}^0, \end{aligned}$$

легко обнаружить, вследствие распада многомерной плотности вероятности на произведение распределений, что локальные приращения марковского процесса статистически независимы.

В самом деле, рассмотрим марковский случайный процесс $\xi(t)$ для четырех моментов $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Образует приращения $\eta_2 = \xi(t_2) - \xi(t_1)$, $\eta_4 = \xi(t_4) - \xi(t_3)$. Нетрудно записать двумерную плотность вероятности этих приращений:

$$W_{\eta_2, \eta_4}(y_2, y_4) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x_1, t_1) W_{\xi}(x_1, t_1 | x_1 + y_2, t_2) \times$$

$$\times W_{\xi}(x_1 + y_2, t_2 | x_3, t_3) W_{\xi}(x_3, t_3 | x_3 + y_4, t_4) dx_1 dx_3.$$

Отсюда следует, что, вообще говоря, $W_{\eta_2 \eta_4}(y_2, y_4)$ не распадается на произведение функции от y_2 и функции от y_4 , т. е. в общем случае марковский процесс не является процессом с независимыми приращениями.

Пусть теперь приращения будут локальными. Для этого зафиксируем x_1 и x_3 , положив $W_{\xi}(x_1, t_1) = \delta(x_1 - x_1^0)$, $W_{\xi}(x_1 + y_2, t_2 | x_3, t_3) = \delta(x_3 - x_3^0)$. Тогда

$$\begin{aligned} W_{\eta_2 \eta_4}(y_2, y_4) &= W_{\xi}(x_1^0, t_1 | x_1^0 + y_2, t_2) W_{\xi}(x_3^0, t_3 | x_3^0 + y_4, t_4) = \\ &= W_{\eta_2}(y_2; x_1^0, t_1, t_2) W_{\eta_4}(y_4; x_3^0, t_3, t_4), \end{aligned}$$

что и означает статистическую независимость локальных приращений. Это утверждение становится особенно понятным, если учесть, что основной чертой марковского процесса является отсутствие последействия. Последнее, в данном случае, означает, что после фиксирования начального значения марковского процесса его последующее развитие совершенно не зависит от предыстории.

Для пространственно однородного марковского процесса статистически независимыми будут и обычные (нелокальные) приращения.

10.5. Дифференциальное уравнение марковского процесса

1. Из статистической независимости приращений

$$\xi(t_1 + \tau_1) - \xi_0(t_1) \text{ и } \xi(t_2 + \tau_2) - \xi_0(t_2),$$

где мы полагаем $t_2 > t_1 + \tau_1$, следует, что статистически независимыми будут и отношения $[\xi(t_1 + \tau_1) - \xi_0(t_1)] \tau_1^{-1}$ и $[\xi(t_2 + \tau_2) - \xi_0(t_2)] \tau_2^{-1}$ при любых сколь угодно малых τ_1, τ_2 .

Введем *локальную производную* случайного процесса $\xi(t)$

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)_{\xi_0} \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \tau) - \xi_0(t)}{\tau}.$$

Локальная производная строится на ансамбле производных тех реализаций случайного процесса, которые в момент времени t имели значение ξ_0 .

Очевидно, локальные производные марковского процесса должны быть статистически независимы для любых $\xi_{01} = \xi_0(t_1)$, $\xi_{02} = \xi_0(t_2)$ и $t_1 \neq t_2$. Поэтому совокупность любого числа локальных производных марковского процесса, взятых в различные моменты времени, является совокупностью статистически независимых случайных величин. Отсюда следует, что локальная производная марковского процесса есть совершенно случайный процесс.

Если производная марковского процесса может быть представлена в виде $d\xi/dt = f(\xi, t)$, где $f(\xi, t)$ — некоторая зависящая детерминированно от t и ξ случайная функция времени, то из вышесказанного следует, что последовательность $f(\xi_{0j}, t_j)$ для любых ξ_{0j} и различных t_j будет последовательностью статистически независимых величин. При этом, в частности, все ξ_{0j} могут быть равными между собой. Это значит, что $(d\xi/dt)_{\xi_0} = f(\xi_0, t)$ как функция времени должна быть совершенно случайным процессом;

Если же марковский процесс однороден в пространстве, то совершенно случайным процессом является его обычная (нелокальная) производная.

2. Разберем теперь вопрос: какой общий вид должно иметь дифференциальное уравнение для марковской переменной?

Прежде всего, следует заметить, что процесс $x(t)$ может быть марковским только тогда, когда он описывается дифференциальным уравнением *первого* порядка (см., например, [7]), ибо только в этом случае знание $x(t_0)$ определит дальнейшую эволюцию реализации $x(t)$ для $t > t_0$, что в свою очередь позволит найти $W(x, t)$ по $W(x, t_0)$.

Таким образом, мы приходим к тому, что дифференциальное уравнение марковского процесса должно в общем случае иметь вид

$$dx/dt = F[x, t, y(t)], \quad (10.5.1)$$

где случайное воздействие $y(t)$, порождающее марковский процесс, определяет разброс реализаций, выходящих из точки $x(t_0)$.

Если случайное воздействие отсутствует, то дифференциальному уравнению $dx/dt = F[x, t, 0]$ соответствует в пространстве (x, t) детерминированное поле скоростей, которое по заданному значению $x(t_0)$ однозначно определяет траекторию $x(t)$ для $t > t_0$.

Воздействие $y(t)$ вносит случайность в поле скоростей. Она ведет к существованию множества возможных реализаций $x(t)$, выходящих из точки $x(t_0)$, и к необходимости вероятностного описания процесса $x(t)$. Можно сказать, что «случайность» такого процесса проявляется в пересечениях его реализаций, поскольку его производная в каждый момент времени есть случайная величина*).

3. Каким свойством должно обладать случайное воздействие $y(t)$, чтобы процесс $x(t)$ был марковским? Оно должно быть таким, чтобы $F[x_0, t, y(t)]$ как функция времени являлась совершенно случайным процессом. Другими словами, случайные величины $F[x_0, t_i, y(t_i)]$ для любых различных t_i должны представлять совокупность статистически независимых величин.

В подавляющем большинстве практически встречающихся ситуаций функция F зависит от аргументов x, t, y детерминированно

*) Это общий признак отличия детерминированного движения от случайного. У детерминированного движения, соответствующего дифференциальному уравнению первого порядка, интегральные кривые никогда не пересекаются. Для стохастического движения пересечения характерны, и их может быть сколь угодно много на конечном интервале времени.

и вместе с тем достаточно «гладко». В этом случае $F[x_0, t, y]$ будет совершенно случайным процессом лишь тогда, когда им будет случайное воздействие $y(t)$.

Таким образом, условием марковости процесса $x(t)$, заданного дифференциальным уравнением (10.5.1) с функцией F , гладкой относительно x, t, y , является совершенная случайность воздействия $y(t)$. В частном случае гауссова воздействия $y(t)$ достаточна, очевидно, его дельта-коррелированность; при этом мы получим непрерывный марковский процесс.

Все сказанное элементарно обобщается и на тот случай, когда правая часть уравнения (10.5.1) зависит от нескольких порождающих случайных функций:

$$dx/dt = F[x, t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)].$$

Процесс $x(t)$ будет марковским, если $F[x, t, y_1, \dots, y_N]$ есть совершенно случайная функция времени. Если зависимость F от $x, t, y_1, y_2, \dots, y_N$, является гладкой, то необходимо, чтобы все $y_i(t)$ были, например, статистически независимыми совершенно случайными процессами.

10.6. Эволюция кумулянтов

1. Существование кинетических уравнений для марковского процесса позволяет вывести простые и удобные формулы для производных по времени от некоторых средних и от них перейти к уравнениям для моментов и кумулянтов процесса.

Пусть $x = x(t)$ — марковский процесс. Рассмотрим произвольную функцию $f(x, t)$. Ее среднее значение

$$\langle f(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) W(x, t) dx$$

в общем случае зависит от времени как непосредственно, так и через вероятностное распределение:

$$\frac{d}{dt} \langle f(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} W(x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} dx.$$

Используя кинетическое уравнение (10.3.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f(x, t) \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right\rangle + \langle \hat{L}^+ (x, t) f(x, t) \rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle K_n(x, t) \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \right\rangle. \end{aligned} \quad (10.6.1)$$

В том случае, когда функция f явно от времени не зависит,

$$\frac{d}{dt} \langle f(x) \rangle = \langle \hat{L}^+(x, t) f(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle K_n(x, t) f^{(n)}(x) \rangle. \quad (10.6.2)$$

Итак, кинетический оператор $\hat{L}(x, t)$ позволяет определить временную эволюцию не только плотности вероятности марковского процесса, но и различных средних.

2. Рассмотрим одномоментное распределение марковского процесса $W(x, t)$. Мы уже знаем, что задание распределения в момент t_1 однозначно определит его для $t > t_1$. Поскольку вероятностное распределение может быть представлено совокупностью кумулянтов $\kappa_1(t), \kappa_2(t), \dots, \kappa_s(t), \dots$ или моментов $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_s(t), \dots$, постольку, очевидно, значение кумулянтов или моментов в момент времени t_1 должно полностью задать их поведение для $t > t_1$. При этом вся информация о характере их изменения будет содержаться в операторе $\hat{L}(x, t)$, поскольку он исчерпывающим образом определяет марковский процесс. Другими словами, эволюция моментов или кумулянтов марковского процесса должна определяться их начальными значениями и кинетическими коэффициентами $K_n(x, t)$. Поэтому можно говорить о существовании кинетических уравнений для моментов и кумулянтов марковского процесса. Эти уравнения мы здесь рассмотрим.

Полагая $f(x) = x, x^2, x^3$ и подставляя в (10.6.2) выражение для оператора $\hat{L}^+(x, t)$ через коэффициенты $K_n(x, t)$ [см. (10.3.7)], найдем следующие уравнения, описывающие эволюцию первых трех моментов марковского процесса:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= \langle K_1(x, t) \rangle, \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= 2 \langle x \cdot K_1(x, t) \rangle + \langle K_2(x, t) \rangle, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= 3 \langle x^2 \cdot K_1(x, t) \rangle + 3 \langle x \cdot K_2(x, t) \rangle + \\ &+ \langle K_3(x, t) \rangle. \end{aligned} \quad (10.6.3)$$

Для произвольного момента аналогично получаем

$$\frac{d\alpha_s(t)}{dt} = \sum_{l=1}^s C_s^l \langle x^{s-l} \cdot K_l(x, t) \rangle. \quad (10.6.4)$$

Для непрерывного марковского процесса, для которого отличны от нуля лишь $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$, правая часть последней формулы имеет только два слагаемых:

$$\frac{d\alpha_s(t)}{dt} = s \langle x^{s-1} \cdot K_1(x, t) \rangle + \frac{s(s-1)}{2} \langle x^{s-2} \cdot K_2(x, t) \rangle. \quad (10.6.5)$$

Пример 10.6.1. Рассмотрим случайный процесс, описываемый линейным дифференциальным уравнением

$$dx/dt + ax = y(t), \quad (10.6.6)$$

где $a > 0$, $\langle y \rangle = 0$, $\langle y(t) y(t + \tau) \rangle = \mathcal{D} \delta(\tau)$.

Согласно (III.6) кинетические коэффициенты марковского процесса $x(t)$ равны $K_1(x, t) = -ax$, $K_2 = \mathcal{D}$, $K_3 = K_4 = \dots = 0$.

Для такого непрерывного марковского процесса уравнения моментов согласно (10.6.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= -a \langle x \rangle = -a\alpha_1(t), \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= -2a \langle x^2 \rangle + \mathcal{D} = -2a\alpha_2(t) + \mathcal{D}, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= -3a \langle x^3 \rangle + 3 \langle x \cdot \mathcal{D} \rangle = -3a\alpha_3(t) + 3\mathcal{D} \alpha_1(t), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d\alpha_s(t)}{dt} &= -s a \alpha_s(t) + \frac{s(s-1)}{2} \mathcal{D} \alpha_{s-2}(t). \end{aligned} \quad (10.6.7)$$

Систему этих дифференциальных уравнений решить несложно. Если задаться начальными условиями $\alpha_s(0) \equiv \alpha_{s0}$, то легко найти, например, что

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \alpha_{10} e^{-at}, \\ \alpha_2(t) &= \left[\alpha_{20} - \frac{\mathcal{D}}{2a} \right] e^{-2at} + \frac{\mathcal{D}}{2a}, \\ \alpha_3(t) &= \alpha_{30} e^{-3at} - 3\alpha_{10} \frac{\mathcal{D}}{2a} e^{-3at} + 3\alpha_{10} \frac{\mathcal{D}}{2a} e^{-at}. \end{aligned} \quad (10.6.8)$$

Отсюда следует, что $\alpha_1(t) \rightarrow 0$, $\alpha_2(t) \rightarrow \mathcal{D}/2a$, $\alpha_3(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Можно показать, что все нечетные моменты стремятся к нулю, а $\alpha_{2n}(t) \rightarrow (2n-1)!! (\mathcal{D}/2a)^n$. Это значит, что каково бы ни было начальное распределение $W(x, 0)$, с ростом времени оно стремится к симметричному гауссову распределению (рис. 10.1). Очевидно, что так и должно быть, ибо уравнение (10.6.6) является линейным, а его правая часть есть гауссов случайный процесс. Тем самым, мы получили нестационарный, однородный во времени марковский процесс, который с течением времени стремится к стационарному гауссову процессу.

3. Приведенный пример показал, что в дифференциальное уравнение (10.6.7) для s -го момента входит сам s -й момент и момент низшего порядка. Это значит, что система уравнений для моментов $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_N(t)$ при любом N является замкнутой. Это обстоятельство имеет место только для линейного дифференциального уравнения, определяющего марковский процесс. Если же уравнение нелинейно, например, если $K_1(x, t)$ нелинейная функция x , то в правую часть (10.6.4) войдут моменты более высоких порядков, нежели s , и система уравнений для любого конечного числа моментов перестает быть замкнутой.

Таким образом, в общем случае система кинетических уравнений для моментов марковского процесса не замкнута и ее точное решение найти невозможно. Всякое же приближенное решение, связанное

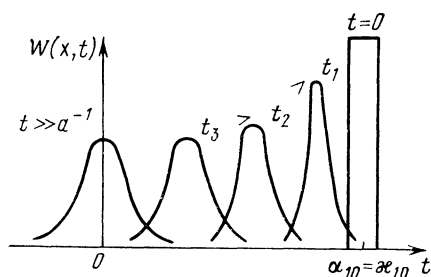


Рис. 10.1.

наконец, «отбрасывание» высших моментов. Последнему, как это уже указывалось в § 5.3, не может соответствовать никакая реальная кривая $W(x, t)$ как функция x , не говоря уже о вероятностном распределении.

В этой связи опять же более перспективными уравнениями должны быть кинетические уравнения для кумулянтов марковского процесса, к которым мы сейчас и перейдем.

4. Так как $\kappa_1(t) = \alpha_1(t)$, то уравнение для $\kappa_1(t)$ совпадает с первым уравнением (10.6.3):

$$\frac{d\kappa_1(t)}{dt} = \langle K_1(x, t) \rangle. \quad (10.6.9)$$

Чтобы получить уравнение для второго кумулянта, продифференцируем по t второй кумулянт $\kappa_2(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1^2(t)$ и используем два первых уравнения (10.6.3). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_2(t)}{dt} = & 2 \langle x \cdot K_1(x, t) \rangle - 2 \langle x \rangle \langle K_1(x, t) \rangle + \\ & + \langle K_2(x, t) \rangle. \end{aligned}$$

Заменяя два первых слагаемых кумулянтной скобкой, придем к

$$\frac{d\kappa_2(t)}{dt} = 2 \langle x, K_1(x, t) \rangle + \langle K_2(x, t) \rangle. \quad (10.6.10)$$

Это уравнение похоже на второе уравнение (10.6.3) с той лишь разницей, что вместо моментных скобок всюду стоят кумулянтные. Можно показать непосредственными вычислениями, что та же закономерность будет иметь место и при записи уравнений для третьего

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_3(t)}{dt} = & 3 \langle x, x, K_1(x, t) \rangle + 3 \langle x, K_2(x, t) \rangle + \\ & \times \langle K_3(x, t) \rangle \end{aligned} \quad (10.6.11)$$

с ее замыканием, по существу, означает или взятие гауссова приближения, если все высшие моменты выражаются через низшие в соответствии с гауссовым законом, или использование *квазигауссова* приближения, когда по гауссову закону через низшие моменты выражаются высшие, начиная с какого-либо, может быть, и довольно высокого порядка [56, 57], или,

и четвертого кумулянтов

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_4(t)}{dt} = & 4 \langle x, x, x, K_1(x, t) \rangle + 6 \langle x, x, K_2(x, t) \rangle + \\ & + 4 \langle x, K_3(x, t) \rangle + \langle K_4(x, t) \rangle. \end{aligned} \quad (10.6.12)$$

Чтобы записать формулу для произвольного кумулянта

$$\frac{d\kappa_s(t)}{dt} = \sum_{l=1}^s C_s^l \langle x^{[s-l]}, K_l(x, t) \rangle, \quad (10.6.13)$$

достаточно сослаться на совпадение первых трех свойств для кумулянтных и моментных скобок и на то, что при выводе уравнений (10.6.4) использовались именно эти три свойства. Можно, конечно, доказать, эту формулу и непосредственными вычислениями, используя метод индукции [32].

Таким образом, уравнения (10.6.9) — (10.6.13) определяют эволюцию кумулянтов произвольного марковского процесса. Здесь, кстати, наиболее ярко видна польза введения кумулянтных скобок, ибо в общем случае никаким другим образом не удастся записать так просто и компактно правые части указанных уравнений.

Если теперь в (10.6.13) разомкнуть кумулянтную скобку, выразив ее через кумулянты $\kappa_k(t)$, то мы получим бесконечную, в общем случае зацепляющуюся систему нелинейных *кинетических* уравнений для кумулянтов произвольного марковского процесса.

Для непрерывного марковского процесса уравнения (10.6.13) переходят в

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_s(t)}{dt} = & s \langle x^{[s-1]}, K_1(x, t) \rangle + \frac{s(s-1)}{2} \times \\ & \times \langle x^{[s-2]}, K_2(x, t) \rangle. \end{aligned} \quad (10.6.14)$$

Пример 10.6.2. Вернемся к примеру 10.6.1 и рассмотрим уравнения кумулянтов марковского процесса, описываемого линейным уравнением (10.6.6). Поскольку $K_2(x, t) = \mathcal{D} = \text{const}$, то согласно пятому свойству кумулянтных скобок (см. § 2.3) второе слагаемое в правой части (10.6.14) для $s > 2$ будет равно нулю. Тогда кинетические уравнения кумулянтов примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_1(t)}{dt} &= -a\kappa_1(t), \\ \frac{d\kappa_2(t)}{dt} &= \mathcal{D} - 2a\kappa_2(t), \\ \frac{d\kappa_3(t)}{dt} &= -3a\kappa_3(t), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d\kappa_s(t)}{dt} &= -sa\kappa_s(t). \end{aligned} \quad (10.6.15)$$

Эти уравнения выглядят гораздо проще, чем соответствующие уравнения для моментов, и являются к тому же замкнутыми для каждого кумулянта.

При произвольных начальных условиях $\kappa_s(0) = \kappa_{s0}$ решения уравнений (10.6.15)

$$\begin{aligned}\kappa_s(t) &= \kappa_{s0} e^{-sat}, \quad s = 1, 3, 4, 5, \dots, \\ \kappa_2(t) &= \left[\kappa_{20} - \frac{\mathcal{D}}{2a} \right] e^{-2at} + \frac{\mathcal{D}}{2a}\end{aligned}\quad (10.6.16)$$

эквивалентны, конечно, (10.6.8). Вместе с тем, уравнения (10.6.16) имеют более прозрачный физический смысл. Из них также следует, что распределение марковского процесса $W(x, t)$ нормализуется при $t \rightarrow \infty$. Однако отсюда следует и то, что нормализация распределения идет быстрее, нежели его движение к точке $x = 0$ (см. рис. 10.1), ибо чем выше порядок кумулянта, тем быстрее он релаксирует, поскольку его время релаксации равно $1/sa$.

Если же начальные условия данного марковского процесса мы зададим в виде $x(0) = x_0$ (совершив привязку всех реализаций марковского процесса в начальный момент времени к точке x_0), то вероятностное распределение марковского процесса, все время оставаясь гауссовым, будет стремиться к финальному распределению с $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = \mathcal{D}/2a$.

5. Бесконечная зацепляющаяся система кинетических уравнений для кумулянтов произвольного марковского процесса, как и система уравнений для моментов, в общем случае является незамкнутой. Найти ее точное решение невозможно. Однако теперь в отличие от набора моментов мы можем, пользуясь модельными распределениями, «обрезать» набор кумулянтов порядком s_0 и рассматривать эти распределения, аппроксимирующие неизвестное вероятностное распределение $W(x, t)$, как приближенные, тем более точные, чем выше s_0 . Использование этого подхода для решения «нелинейных» задач составляет основное содержание последних двух глав книги, поэтому мы здесь ограничимся только одним примером «нелинейного» марковского процесса, да и для него лишь запишем кинетические уравнения кумулянтов.

Пример 10.6.3. Пусть марковский процесс $x(t)$ представлен уравнением

$$dx/dt + kx + ax^3 = y(t), \quad (10.6.17)$$

где $k > 0$, $a > 0$, а процесс $y(t)$ обладает теми же свойствами, что и в примере 10.6.1. Два первых кинетических коэффициента этого марковского процесса, который является непрерывным и однородным во времени, равны согласно (III.6) $K_1(x, t) = -kx - ax^3$, $K_2(x, t) = \mathcal{D}$. Уравнения эволюции кумулянтов рассматриваемого марковского процесса на основании (10.6.9) — (10.6.13) имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\kappa_1(t)}{dt} &= -k\langle x \rangle - a\langle x^3 \rangle, \\ \frac{d\kappa_2(t)}{dt} &= -2k\langle x, x \rangle - 2a\langle x, x^3 \rangle + \mathcal{D}, \\ \frac{d\kappa_3(t)}{dt} &= -3k\langle x, x, x \rangle - 3a\langle x, x, x^3 \rangle, \\ \frac{d\kappa_4(t)}{dt} &= -4k\langle x, x, x, x \rangle - 4a\langle x, x, x, x^3 \rangle, \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\frac{d\kappa_s(t)}{dt} = -s\kappa_s(t) - sa \langle x^{[s-1]}, x^s \rangle. \quad (10.6.18)$$

Если раскрыть кумулянтные скобки в правых частях первых четырех уравнений (10.6.18), выразив эти скобки через кумулянты, то придем к

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_1(t)}{dt} &= -\kappa_1 - a[\kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3], \\ \frac{d\kappa_2(t)}{dt} &= -2\kappa_2 - 2a[\kappa_4 + 3\kappa_1\kappa_3 + 3\kappa_2^2 + 3\kappa_1^2\kappa_2] + \mathcal{D}, \\ \frac{d\kappa_3(t)}{dt} &= -3\kappa_3 - 3a[\kappa_5 + 3\kappa_1\kappa_4 + 9\kappa_2\kappa_3 + 3\kappa_1^2\kappa_3 + 6\kappa_1\kappa_2^2], \\ \frac{d\kappa_4(t)}{dt} &= -4\kappa_4 - 4a[\kappa_6 + 3\kappa_1\kappa_5 + 12\kappa_2\kappa_4 + 3\kappa_1^2\kappa_4 + \\ &\quad + 9\kappa_3^2 + 18\kappa_1\kappa_2\kappa_3 + 6\kappa_2^3]. \end{aligned} \quad (10.6.19)$$

Правые части полученных кинетических уравнений (10.6.19) ясно показывают «степень» их зацепления имеющейся нелинейностью в уравнении (10.6.17).

6. Если рассмотреть частный случай пространственно однородного марковского процесса, для которого $K_n(x, t) \equiv K_n(t)$, то вследствие независимости кинетических коэффициентов от x все кумулянтные скобки в правой части (10.6.13), кроме слагаемых с $l = s$, будут равны нулю. Поэтому кинетические уравнения для кумулянтов такого марковского процесса примут наипростейший вид:

$$d\kappa_s(t)/dt = K_s(t). \quad (10.6.20)$$

Таким образом, кинетические коэффициенты пространственно однородного марковского процесса имеют смысл скорости изменения соответствующего кумулянта. Выбирая произвольные начальные условия в момент $t = t_0$, находим из (10.6.20) общее решение для $t \geq t_0$:

$$\kappa_s(t) = \kappa_s(t_0) + \int_{t_0}^t K_s(u) du. \quad (10.6.21)$$

Пусть однородный в пространстве марковский процесс является также и непрерывным. В этом случае

$$\begin{aligned} m(t) &= m(t_0) + \int_{t_0}^t K_1(u) du, \quad D(t) = D(t_0) + \int_{t_0}^t K_2(u) du, \\ \kappa_s(t) &= \kappa_s(t_0) = \text{const}, \quad s \geq 3. \end{aligned} \quad (10.6.22)$$

Если в начальный момент времени марковский процесс был также и гауссовым ($\kappa_s(t_0) = 0, s \geq 3$), то он гауссовым и останется. Так, если $W(x, t_0) = \delta(x - x_0)$, то среднее значение и дисперсия гауссова процесса будут изменяться во времени как

$$m(t) = x_0 + \int_{t_0}^t K_1(u) du, \quad D(t) = \int_{t_0}^t K_2(u) du.$$

Если же начальное распределение было негауссовым, то оно останется негауссовым и для всех $t > t_0$. В то же время будет происходить *нормализация* распределения из-за того, что дисперсия в соответствии с (10.6.22) будет непрерывно увеличиваться при постоянстве всех высших кумулянтов.

7. Если существует стационарная плотность вероятности $W_{ст}(x)$, то моменты и кумулянты также будут стремиться к установившимся значениям и в пределе мы получим стационарный марковский процесс. Это будет в том случае, когда $K_n(x, t) \equiv K_n(x)$.

Нетрудно записать уравнения, определяющие установившиеся значения моментов и кумулянтов марковского процесса. Для этого следует приравнять нулю правые части уравнений (10.6.3), (10.6.4) или уравнений (10.6.9) — (10.6.13). В первом случае мы придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} \langle K_1(x) \rangle &= 0, \\ 2 \langle x \cdot K_1(x) \rangle + \langle K_2(x) \rangle &= 0, \\ 3 \langle x^2 \cdot K_1(x) \rangle + 3 \langle x \cdot K_2(x) \rangle + \langle K_3(x) \rangle &= 0, \\ 4 \langle x^3 \cdot K_1(x) \rangle + 6 \langle x^2 \cdot K_2(x) \rangle + \\ + 4 \langle x \cdot K_3(x) \rangle + \langle K_4(x) \rangle &= 0, \\ \sum_{l=1}^s C_s^l \langle x^{s-l} \cdot K_l(x) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (10.6.23)$$

Во втором случае системой, эквивалентной (10.6.23), будет

$$\begin{aligned} \langle K_1(x) \rangle &= 0, \\ 2 \langle x, K_1(x) \rangle + \langle K_2(x) \rangle &= 0, \\ 3 \langle x, x, K_1(x) \rangle + 3 \langle x, K_2(x) \rangle + \langle K_3(x) \rangle &= 0, \\ 4 \langle x, x, x, K_1(x) \rangle + 6 \langle x, x, K_2(x) \rangle + \\ + 4 \langle x, K_3(x) \rangle + \langle K_4(x) \rangle &= 0, \\ \sum_{l=1}^s C_s^l \langle x^{[s-l]}, K_l(x) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (10.6.24)$$

10.7. Эволюция моментных функций

1. Рассмотрим стационарный марковский процесс $x(t)$ с независимыми от времени кинетическими коэффициентами $K_n(x)$. Двумерная плотность вероятности этого процесса согласно (10.3.9) подчиняется уравнению эволюции

$$\frac{\partial W(x_1; x_2, \tau)}{\partial \tau} = \hat{L}(x_2) W(x_1; x_2, \tau) \quad (10.7.1)$$

Рассмотрим функцию марковских переменных $f(x, (t), x(t + \tau))$, среднее значение которой

$$\langle f(x, x_\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x_1, x_2) W(x_1; x_2, \tau) dx_1 dx_2$$

зависит только от разности моментов времени τ . С помощью (10.7.1) и оператора $\hat{L}^+(x)$ легко найти производную среднего значения $\langle f \rangle$ по τ :

$$\begin{aligned} \frac{d \langle f(x, x_\tau) \rangle}{d\tau} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x_1, x_2) \hat{L}(x_2) W(x_1; x_2, \tau) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int W(x_1; x_2, \tau) \hat{L}^+(x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d \langle f(x, x_\tau) \rangle}{d\tau} = \langle \hat{L}^+(x_\tau) f(x, x_\tau) \rangle. \quad (10.7.2)$$

2. Полученная формула сразу же позволяет написать уравнения для любых моментных функций двумоментного распределения $W(x_1; x_2, \tau)$ стационарного марковского процесса. Напомним, что моментная функция s -го порядка двумоментного распределения стационарного случайного процесса определяется как

$$\alpha_s(0^{[s-r]}, \tau^{[r]}) \equiv \langle x^s \cdot x_\tau^r \rangle.$$

Заметим при этом, что первая моментная функция от τ не зависит. Полагая $f(x, x_\tau) = x^{s-r} \cdot x_\tau^r$ и учитывая (10.3.7), из (10.7.2) получим следующие уравнения для моментной функции второго порядка:

$$\frac{d\alpha_2(0, \tau)}{d\tau} = \langle x \cdot K_1(x_\tau) \rangle; \quad (10.7.3)$$

для двух моментных функций третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_3(0, 0, \tau)}{d\tau} &= \langle x^2 \cdot K_1(x_\tau) \rangle, \\ \frac{d\alpha_3(0, \tau, \tau)}{d\tau} &= 2 \langle x \cdot x_\tau \cdot K_1(x_\tau) \rangle + \langle x \cdot K_2(x_\tau) \rangle; \end{aligned} \quad (10.7.4)$$

для трех моментных функций четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_4(0, 0, 0, \tau)}{d\tau} &= \langle x^3 \cdot K_1(x_\tau) \rangle, \\ \frac{d\alpha_4(0, 0, \tau, \tau)}{d\tau} &= 2 \langle x^2 \cdot x_\tau K_1(x_\tau) \rangle + \langle x^2 K_2(x_\tau) \rangle, \\ \frac{d\alpha_4(0, \tau, \tau, \tau)}{d\tau} &= 3 \langle x \cdot x_\tau^2 K_1(x_\tau) \rangle + 3 \langle x \cdot x_\tau K_2(x_\tau) \rangle + \\ &+ \langle x K_3(x_\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (10.7.5)$$

Нетрудно показать, что в общем случае уравнение эволюции моментной функции произвольного порядка примет вид

$$\frac{d\alpha_s(0^{[s-r]}, \tau^{[r]})}{d\tau} = \sum_{l=1}^r C_l^r \langle x^{s-r} \cdot x_\tau^{r-l} K_l(x_\tau) \rangle. \quad (10.7.6)$$

Если в (10.7.6) положить $r = s$, то мы получим уравнения для моментов $\alpha_s(\tau, \tau, \tau, \dots, \tau) = \alpha_s(0, 0, 0, \dots, 0)$, которые вовсе не зависят от τ в силу стационарности рассматриваемого марковского процесса. В этом случае (10.7.6) сведется к системе уравнений ($s = 1, 2, 3, \dots$)

$$\sum_{l=1}^s C_l^s \langle x^{s-l} \cdot K_l(x) \rangle = 0, \quad (10.7.7)$$

которые связывают установившиеся значения моментов распределения [ср. с (10.6.23)].

3. Обратим внимание на уравнение (10.7.3) для корреляционной функции стационарного марковского процесса

$$\frac{dK_x[\tau]}{d\tau} = \langle x K_1(x_\tau) \rangle, \quad (10.7.8)$$

из которого следует, что поведение корреляционной функции произвольного марковского процесса определяется только первым кинетическим коэффициентом $K_1(x)$.

Пример 10.7.1. Пусть $K_1(x) = -ax$, как это было для примера 10.6.1. Тогда (10.7.8) становится линейным уравнением

$$\frac{dK_x[\tau]}{d\tau} = -a \langle x x_\tau \rangle = -a K_x[\tau].$$

Соответственно для $\tau > 0$ имеем

$$K_x[\tau] = K_x[0] e^{-a\tau} = D e^{-a\tau}.$$

Такое простое уравнение для корреляционной функции будет конечно только тогда, когда $K_1(x)$ есть линейная функция x , т. е. когда мы имеем дело с «линейным» марковским процессом. Если же $K_1(x)$ нелинейно зависит от x , то в уравнение для $\alpha_2(0, \tau)$ будут входить высшие моментные функции и оно станет незамкнутым. Та же самая ситуация возникнет и для высших моментных функций.

Так, например, если $K_1(x) = -ax^3$, $K_2(x) = \mathcal{D} = \text{const}$, [ср. с примером 10.6.3], а $K_3 = K_4 = \dots = 0$, то легко получить из (10.7.4) — (10.7.6) следующую систему уравнений для моментных функций:

$$\dot{\alpha}_2(0, \tau) = -a\alpha_4(0, \tau, \tau, \tau),$$

$$\dot{\alpha}_3(0, 0, \tau) = -a\alpha_5(0, 0, \tau, \tau, \tau),$$

$$\dot{\alpha}_3(0, \tau, \tau) = -2a\alpha_5(0, \tau, \tau, \tau, \tau) + \mathcal{D}\alpha_1,$$

$$\dot{\alpha}_4(0, 0, 0, \tau) = -a\alpha_6(0, 0, 0, \tau, \tau, \tau),$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_4(0,0,\tau,\tau) &= -2a\alpha_6(0,0,\tau,\tau,\tau,\tau) + \mathcal{D}\alpha_2, \\ \dot{\alpha}_4(0,\tau,\tau,\tau) &= -3a\alpha_6(0,\tau,\tau,\tau,\tau,\tau) + 3\mathcal{D}\alpha_2(0,\tau).\end{aligned}$$

Эта система не замкнута. Чтобы найти $\alpha_2(0,\tau)$, надо отыскать $\alpha_4(0,\tau,\tau,\tau)$, а для этого надо знать, в свою очередь, $\alpha_6(0,\tau^{[5]})$, и т. д. Получается бесконечная система зацепляющихся уравнений, которую точно решить невозможно. Интересно отметить, что система уравнений для моментных функций получилась линейной, несмотря на то, что мы рассматривали «нелинейный» марковский процесс (ср. с [5, 26, 27]).

4. Легко найти условия, налагаемые на кинетические коэффициенты $K_n(x)$, при которых уравнения (10.7.3) — (10.7.6) будут замкнутыми. Для этого необходимо, чтобы $K_n(x)$ было полиномом по x степени не выше n :

$$K_n(x) = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + \dots + a_{nn}x^n.$$

Здесь a_{nl} — любые конечные числа. В этом случае, например, уравнение для корреляционной функции примет вид

$$\frac{dK_x[\tau]}{d\tau} = a_{10}\alpha_1 + a_{11}K_x[\tau],$$

где первый момент α_1 может быть определен независимым образом из первого уравнения (10.7.7): $a_{10} + a_{11}\alpha_1 = 0$.

10.8. Кинетические уравнения кумулянтных функций

1. Перейдем теперь к составлению уравнений для кумулянтных функций стационарного марковского процесса.

Согласно (7.1.7) кумулянтные функции второго и третьего порядков следующим образом выражаются через моментные:

$$\kappa_2(0,\tau) = \alpha_2(0,\tau) - \alpha_1^2,$$

$$\begin{aligned}\kappa_3(0,0,\tau) &= \alpha_3(0,0,\tau) - 2\alpha_1\alpha_2(0,\tau) - \alpha_1\alpha_2 + \\ &+ 2\alpha_1^3,\end{aligned}$$

$$\kappa_3(0,\tau,\tau) = \alpha_3(0,\tau,\tau) - 2\alpha_1\alpha_2(0,\tau) - \alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3.$$

Дифференцируя $\kappa_2(0,\tau)$ по τ , с помощью (10.7.3) найдем

$$\frac{d\kappa_2(0,\tau)}{d\tau} = \frac{d\alpha_2(0,\tau)}{d\tau} = \langle xK_1(x_\tau) \rangle.$$

Итак, вторая кумулянтная функция подчиняется тому же уравнению, что и моментная. Вместе с тем, учитывая, что $\langle K_1(x_\tau) \rangle = 0$ [это следует из (10.7.7) при $s=1$], правую часть полученного выражения можно выразить через кумулянтную скобку:

$$\frac{d\kappa_2(0,\tau)}{d\tau} = \langle x, K_1(x_\tau) \rangle. \quad (10.8.1)$$

Дифференцируя по τ третьи кумулянтные функции и учитывая (10.7.3), (10.7.4), получим

$$\begin{aligned}\frac{d\kappa_3(0, 0, \tau)}{d\tau} &= \langle x^2 K_1(x_\tau) \rangle - 2 \langle x \rangle \langle x K_1(x_\tau) \rangle, \\ \frac{d\kappa_3(0, \tau, \tau)}{d\tau} &= 2 \langle x x_\tau K_1(x_\tau) \rangle - 2 \langle x \rangle \langle x K_1(x_\tau) \rangle + \\ &+ \langle x K_2(x_\tau) \rangle.\end{aligned}\quad (10.8.2)$$

Принимая во внимание, что согласно (10.7.7)

$$2 \langle x K_1(x) \rangle + \langle K_2(x) \rangle = 0,$$

а также вторую формулу (2.2.1), правые части (10.8.2) также можно выразить через кумулянтные скобки:

$$\begin{aligned}\frac{d\kappa_3(0, 0, \tau)}{d\tau} &= \langle x, x, K_1(x_\tau) \rangle, \\ \frac{d\kappa_3(0, \tau, \tau)}{d\tau} &= 2 \langle x, x_\tau, K_1(x_\tau) \rangle + \langle x, K_2(x_\tau) \rangle.\end{aligned}\quad (10.8.3)$$

Сравнивая полученные формулы (10.8.1), (10.8.3) с соответствующими формулами (10.7.3), (10.7.4) для моментных функций, видим, что они полностью аналогичны и отличаются лишь тем, что в уравнениях моментных функций слева и справа стоят моментные скобки, а в уравнениях кумулянтных функций — кумулянтные скобки. Эта аналогия опять же (ср. с кинетическими уравнениями для моментов и кумулянтов) связана с возможностью замены моментных скобок на кумулянтные, если используются только первые три свойства кумулянтных скобок (2.3.1).

Совершенно аналогично обстоит дело и с кумулянтными функциями высших порядков. Так, например, для трех кумулянтных функций четвертого порядка уравнения эволюции примут вид

$$\begin{aligned}\frac{d\kappa_4(0, 0, 0, \tau)}{d\tau} &= \langle x, x, x, K_1(x_\tau) \rangle, \\ \frac{d\kappa_4(0, 0, \tau, \tau)}{d\tau} &= 2 \langle x, x, x_\tau, K_1(x_\tau) \rangle + \langle x, x, K_2(x_\tau) \rangle, \\ \frac{d\kappa_4(0, \tau, \tau, \tau)}{d\tau} &= 3 \langle x, x_\tau, x_\tau, K_1(x_\tau) \rangle + 3 \langle x, x_\tau, K_2(x_\tau) \rangle + \\ &+ \langle x, K_3(x_\tau) \rangle.\end{aligned}\quad (10.8.4)$$

Производная кумулянтной функции произвольного порядка равна

$$\frac{d\kappa_s(0^{[s-r]}, \tau^{[r]})}{d\tau} = \sum_{l=1}^r C_r^l \langle x^{[s-r]}, x_\tau^{[r-l]}, K_l(x_\tau) \rangle.\quad (10.8.5)$$

Таковы уравнения эволюции кумулянтных функций произвольного стационарного марковского процесса.

2. Из полученных уравнений следует, что их решением может быть $\kappa_s(0^{[s-r]}, \tau^{[r]}) \equiv 0$, если τ взять настолько большим, чтобы x и x_τ стали статистически независимыми переменными, поскольку в этом случае все кумулянтные скобки как в левых, так и в правых частях обращаются в нуль. Таким образом, нулевое решение для кумулянтных функций имеет место при $\tau \rightarrow \infty$.

Правые части уравнений (10.8.1), (10.8.3) — (10.8.5), связывающие кумулянтными скобками x , x_τ и $K_1(x_\tau)$, могут быть выражены через те же кумулянтные функции $\kappa_k(0^{[k-r]}, \tau^{[r]})$. При этом окажется, что производная какой-либо конкретной кумулянтной функции будет определяться значениями всех остальных кумулянтных функций, и для произвольного марковского процесса все они в общем случае будут отличными от нуля. Таким образом, для нахождения, например, $\kappa_2(0, \tau)$ необходимо отыскивать всю совокупность кумулянтных функций. Разумеется, теперь уже можно говорить и о приближенном нахождении, скажем, первых s кумулянтных функций при условии, что все последующие кумулянтные функции (и, разумеется, кумулянты) полагаются тождественно равными нулю (модельное приближение s -го порядка).

3. Обратимся теперь к полученным уравнениям и разомкнем кумулянтные скобки, входящие в их правые части. Эта операция даст нам возможность получить *кинетические* уравнения для кумулянтных функций, т. е. уравнения, в которых производные кумулянтных функций непосредственно выражаются через значения самих функций.

Начнем с уравнения (10.8.1) для второй кумулянтной функции. Правая часть этого уравнения может быть легко разомкнута, если воспользоваться формулой (7.7.3):

$$\langle x, f(x_\tau) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right\rangle \kappa_{1+n}(0, \tau^{[n]}). \quad (10.8.6)$$

Таким образом, приходим к следующему уравнению для ковариационной функции:

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_2(0, \tau)}{d\tau} = & \left\langle \frac{dK_1(x)}{dx} \right\rangle \kappa_2(0, \tau) + \frac{1}{2!} \left\langle \frac{d^2 K_1(x)}{dx^2} \right\rangle \kappa_3(0, \tau, \tau) + \\ & + \frac{1}{3!} \left\langle \frac{d^3 K_1(x)}{dx^3} \right\rangle \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau) + \dots + \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n K_1(x)}{dx^n} \right\rangle \times \\ & \times \kappa_{1,n}(\tau) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{dx^n} K_1(x) \right\rangle \kappa_{1,n}(\tau). \end{aligned} \quad (10.8.7)$$

Здесь опять обозначено $\kappa_{1+s}(0, \tau^{[s]}) \equiv \kappa_{1,s}(\tau)$.

Полученный результат весьма интересен. Во-первых, видно, что хотя в уравнение для ковариационной функции входят кумулянтные функции всех порядков, относительно них оно является *линейным*. Во-вторых, из (10.8.7) следует, что коэффициенты, стоящие

перед кумулянтными функциями, определяются *одномоментным* распределением рассматриваемого стационарного марковского процесса, т. е. зависят от кумулянтов распределения. В-третьих, в (10.8.7) входят кумулянтные функции только одного вида: $\kappa_s(0, \tau, \dots, \tau)$. Отметим, наконец, что если первый кинетический коэффициент $K_1(x)$ является полиномом, то ряд (10.8.7) будет конечным.

4. Перейдем к уравнению для кумулянтной функции $\kappa_3(0, \tau, \tau)$, входящей в (10.8.7). Используя формулу (10.8.6), а также (7.7.7), из второго уравнения (10.8.3) найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_3(0, \tau, \tau)}{d\tau} &= -2 \langle K_1 \rangle \kappa_2(0, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \times \\ &\times \left\langle \frac{d^n}{dx^n} 2(x, K_1(x)) \right\rangle \kappa_{1, n}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \times \\ &\times \left\langle \frac{d^n}{dx^n} K_2(x) \right\rangle \kappa_{1, n}(\tau). \end{aligned}$$

Учитывая условие $\langle K_1 \rangle = 0$, получаем окончательно следующее кинетическое уравнение для третьей кумулянтной функции:

$$\frac{d\kappa_3(0, \tau, \tau)}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{dx^n} [2(x, K_1) + K_2] \right\rangle \kappa_{1, n}(\tau). \quad (10.8.8)$$

Выполняя дифференцирование неполных кумулянтных скобок и учитывая их свойства, находим раскрытый вид формулы (10.8.8):

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_3(0, \tau, \tau)}{d\tau} &= [2 \langle x, K_1' \rangle + \langle K_2' \rangle] \kappa_2(0, \tau) + \frac{1}{2!} \times \\ &\times [4 \langle K_1' \rangle + 2 \langle x, K_1'' \rangle + \langle K_2'' \rangle] \kappa_3(0, \tau, \tau) + \frac{1}{3!} \times \\ &\times [6 \langle K_1'' \rangle + 2 \langle x, K_1''' \rangle + \langle K_2''' \rangle] \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau) + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} [2n \langle K_1^{(n-1)} \rangle + 2 \langle x, K_1^{(n)} \rangle + \\ &+ \langle K_2^{(n)} \rangle] \kappa_{1, n}(\tau) + \dots \end{aligned} \quad (10.8.9)$$

5. Аналогичным образом из третьего уравнения (10.8.4) с помощью (10.8.6), (4.7.18), (7.7.7) выводится уравнение для четвертой кумулянтной функции:

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_4(0, \tau, \tau, \tau)}{d\tau} &= -6 \langle x, K_1 \rangle \kappa_2(0, \tau) - 3 \langle K_1 \rangle \kappa_3(0, \tau, \tau) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{dx^n} 3(x, x, K_1) \right\rangle \kappa_{1, n}(\tau) - 3 \langle K_2 \rangle \kappa_2(0, \tau) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{dx^n} 3(x, K_2) \right\rangle \kappa_{1,n}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \times \\ \times \left\langle \frac{d^n}{dx^n} K_3 \right\rangle \kappa_{1,n}(\tau).$$

Приняв во внимание (10.7.7) для значений $s = 1, 2$, получим

$$\frac{d\kappa_4(0, \tau, \tau, \tau)}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{dx^n} [3(x, x, K_1) + 3(x, K_2) + \right. \\ \left. + K_3] \right\rangle \kappa_{1,n}(\tau). \quad (10.8.10)$$

В раскрытом виде [см. (2.8.11)] это кинетическое уравнение выглядит так:

$$\frac{d\kappa_4(0, \tau, \tau, \tau)}{d\tau} = [3 \langle x, x, K'_1 \rangle + 3 \langle x, K'_2 \rangle + \langle K'_3 \rangle] \times \\ \times \kappa_2(0, \tau) + \frac{1}{2!} [12 \langle x, K'_1 \rangle + 3 \langle x, x, K''_1 \rangle + 6 \langle K'_2 \rangle + \\ + 3 \langle x, K''_2 \rangle + \langle K''_3 \rangle] \kappa_3(0, \tau, \tau) + \frac{1}{3!} [18 \langle K'_1 \rangle + \\ + 18 \langle x, K''_1 \rangle + 3 \langle x, x, K'''_1 \rangle + 9 \langle K''_2 \rangle + 3 \langle x, K'''_2 \rangle + \\ + \langle K'''_3 \rangle] \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau) + \dots + \frac{1}{n!} [3n(n-1) \langle K_1^{(n-2)} \rangle + \\ + 6n \langle x, K_1^{(n-1)} \rangle + 3 \langle x, x, K_1^{(n)} \rangle + 3n \langle K_2^{(n-1)} \rangle + \\ + 3 \langle x, K_2^{(n)} \rangle \langle K_3^{(n)} \rangle] \kappa_{1,n}(\tau) + \dots \quad (10.8.11)$$

Таким образом, уравнения (10.8.8), (10.8.10) также являются линейными по отношению ко всем кумулянтным функциям. В их правые части опять входят только кумулянтные функции вида $\kappa_k(0, \tau^{[k-1]})$, а коэффициенты при них зависят от кумулянтов рассматриваемого стационарного марковского процесса. И если все три кинетических коэффициента являются полиномами, то ряды (10.8.8), (10.8.10) также будут содержать конечное число членов.

6. Если теперь обратиться к кумулянтной функции s -го порядка то кинетическое уравнение для нее будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\kappa_s(0, \tau, \dots, \tau)}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{dx^n} \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l(x^{[s-1-l]}, K_l(x)) \right\rangle \times \\ \times \kappa_{1,n}(\tau). \quad (10.8.12)$$

Таким образом, разложение (10.8.12) при $s = 1, 2, 3, \dots$ дает бесконечную систему *линейных* однородных дифференциальных уравнений *первого* порядка для кумулянтных функций произвольного стационарного марковского процесса.

Тот факт, что уравнения для кумулянтных функций марковского процесса оказались линейными, вообще говоря, представляется удивительным. Следует также иметь в виду, что линейным уравнениям подчиняется лишь временная зависимость кумулянтных функций, в то время как их начальные значения $\kappa_s(0, 0, \dots, 0) = \kappa_s$, равные кумулянтам марковского процесса, удовлетворяют согласно (10.6.13) *нелинейным* уравнениям.

Другими словами, кумулянты марковского процесса двояко влияют на вид кумулянтных функций. Во-первых, через коэффициенты уравнений (10.8.12) они определяют конкретный вид кумулянтных функций и, следовательно, скорость их временной эволюции, а во-вторых, определяют абсолютные величины кумулянтных функций, т. е. их начальные значения. Таким образом, хотя сами кумулянтные функции и подчиняются линейным уравнениям, роль нелинейности системы является тем не менее определяющей.

Обратим внимание на то, что выражения, стоящие в (10.8.12) под знаком дифференцирования, есть не что иное, как соотношения (10.6.24), определяющие значение кумулянтов рассматриваемого стационарного марковского процесса, в которых вместо угловых кумулянтных скобок $\langle \dots \rangle$ поставлены круглые скобки $(\dots)$. Это значит, что в сумме (10.8.12) мы можем суммирование начать со значения $n = 0$, поскольку в этом случае круглые скобки перейдут в угловые, и это слагаемое на основании (10.6.24) будет просто равно нулю.

Если, наконец, стационарный марковский процесс является непрерывным, то кинетические уравнения его кумулянтных функций принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_s(0, \tau, \dots, \tau)}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{dx^n} \left[(s-1) (x^{[s-2]}, K_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(s-1)(s-2)}{2} (x^{[s-3]}, K_2) \right] \right\rangle \kappa_{1,n}(\tau). \end{aligned} \quad (10.8.13)$$

7. Полученные уравнения кумулянтных функций произвольного стационарного марковского процесса позволяют определить и общий вид временной зависимости этих функций. В самом деле, кумулянтные функции подчиняются бесконечной системе линейных уравнений, которую можно записать в виде

$$\frac{d\kappa_s(0, \tau^{[s-1]})}{d\tau} = \sum_{k=2}^{\infty} A_{sk} \kappa_k(0, \tau^{[k-1]}), \quad s = 2, 3, \dots \quad (10.8.14)$$

Коэффициенты системы

$$\begin{aligned} A_{sk} = \frac{1}{(k-1)!} \left\langle \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l (x^{[s-1-l]}, K_l(x)) \right\rangle = \\ = A_{sk}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s, \dots) \end{aligned}$$

зависят только от кумулянтов стационарного марковского процесса.

Решением линейной однородной системы (10.8.14) является последовательность функций ($\tau > 0, s = 2, 3, 4, \dots$)

$$\kappa_s(0, \tau^{[s-1]}) = B_{s1} e^{-\lambda_1 \tau} + B_{s2} e^{-\lambda_2 \tau} + B_{s3} e^{-\lambda_3 \tau} + \dots,$$

где мы предположили для простоты, что $\lambda_k = \lambda_k(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s, \dots)$ — корни характеристического уравнения бесконечного порядка

$$\begin{vmatrix} A_{22} - \lambda & A_{23} & A_{24} & A_{25} & \dots \\ A_{32} & A_{33} - \lambda & A_{34} & A_{35} & \dots \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} - \lambda & A_{45} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (10.8.15)$$

все являются различными.

Коэффициенты B_{sm} находят из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} B_{sm} &= \kappa_s, \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m B_{sm} &= \sum_{k=2}^{\infty} A_{sk} \kappa_k, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 B_{sm} &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} A_{sk} A_{kp} \kappa_p, \\ &\dots \\ (-1)^N \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^N B_{sm} &= \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=2}^{\infty} \dots \sum_{k_N=2}^{\infty} A_{sk_1} A_{k_1 k_2} \dots \\ &\dots \cdot A_{k_{N-1} k_N} \kappa_{k_N}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (10.8.16)$$

Определитель этой системы есть определитель Вандермонда бесконечного порядка. Ясно, что $B_{sm} = B_{sm}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s, \dots)$.

Таким образом, общий вид кумулянтной функции s -го порядка для некрратных корней таков ($\tau > 0$):

$$\begin{aligned} \kappa_s(0, \tau^{[s-1]}) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{sm}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s, \dots) \times \\ &\times \exp[-\lambda_m(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s, \dots) \tau]. \end{aligned} \quad (10.8.17)$$

Таким образом, мы определили общую структуру (10.8.17) кумулянтных функций произвольного стационарного марковского процесса. Заметим, что подобная структура для одного частного случая кумулянтных функций — ковариационной функции — была ранее установлена Р. Л. Стратоновичем [5].

Основная практическая ценность полученных уравнений заключается в том, что мы всегда можем заменить бесконечную последовательность кумулянтных функций конечным набором, т. е. исполь-

зовать модельные приближения. Для этого конечного набора можем определить затем конечный же набор корней λ_m характеристического уравнения (10.8.15) и из системы уравнений (10.8.16) найти опять же конечный набор коэффициентов B_{sm} . В результате этого мы получим кумулянтные функции произвольного марковского процесса в *модельном приближении*. Именно таким образом мы и будем решать далее конкретные задачи по анализу нелинейных преобразований случайных процессов.

10.9. Кинетические уравнения многомерного марковского процесса

1. Многомерным марковским процессом или марковской совокупностью $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$ называется такой векторный процесс, который обладает плотностью вероятности переходов $W(\mathbf{x}^{(1)}, t_1 | \mathbf{x}^{(2)}, t_2)$, удовлетворяющей уравнению Смолуховского

$$W(\mathbf{x}^{(1)}, t_1 | \mathbf{x}^{(3)}, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{x}^{(1)}, t_1 | \mathbf{x}^{(2)}, t_2) \times \\ \times W(\mathbf{x}^{(2)}, t_2 | \mathbf{x}^{(3)}, t_3) d\mathbf{x}^{(2)},$$

$$\text{где } \mathbf{x}^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_N^{(k)}\}, d\mathbf{x}^{(2)} = dx_1^{(2)} dx_2^{(2)} \dots dx_N^{(2)}.$$

Случайные процессы $x_i(t)$, входящие в марковскую совокупность, называются *компонентами* многомерного марковского процесса. Многомерный марковский процесс может быть представлен системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}, t, \mathbf{y}(t)],$$

где векторная случайная функция $\mathbf{y}$ должна быть такой, чтобы $\mathbf{F}$ при фиксированном $\mathbf{x}_0$ было совершенно случайным векторным процессом. Если функция $\mathbf{F}$ является детерминированной и гладкой, то совершенно случайным векторным процессом должно быть случайное воздействие $\mathbf{y}(t)$.

Как и в случае простого марковского процесса, одномоментная плотность вероятности многомерного марковского процесса $W(\mathbf{x}, t)$ полностью определяет всю дальнейшую эволюцию совокупности $\mathbf{x}(t)$. Поэтому кинетическое уравнение для $W(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \hat{L}(\mathbf{x}, t) W(\mathbf{x}, t).$$

Выбирая в качестве начального условия $W(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, мы получим кинетическое уравнение и для плотности вероятности переходов:

$$\frac{\partial W(\mathbf{x}^0, t_0 | \mathbf{x}, t)}{\partial t} = \hat{L}(\mathbf{x}, t) W(\mathbf{x}^0, t_0 | \mathbf{x}, t). \quad (10.9.1)$$

Кинетический оператор $\hat{L}(\mathbf{x}, t)$ многомерного марковского процесса, действующий на компоненты вектора $\mathbf{x}$, в общем случае имеет вид [16]

$$\hat{L}(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} K_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} K_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) - \\ - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} K_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{x}, t) + \dots$$

По повторяющимся индексам $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3, \dots, N$, нумерующим компоненты марковского процесса, происходит суммирование. Кинетические коэффициенты многомерного марковского процесса $K_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $K_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$, $K_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{x}, t)$, ... являются симметрическими функциями индексов и определяются как

$$K_\alpha(\mathbf{x}, t) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [x_{\alpha\tau} - x_\alpha] \rangle_{\text{усл}}, \\ K_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [x_{\alpha\tau} - x_\alpha] [x_{\beta\tau} - x_\beta] \rangle_{\text{усл}}, \\ K_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{x}, t) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [x_{\alpha\tau} - x_\alpha] [x_{\beta\tau} - x_\beta] [x_{\gamma\tau} - x_\gamma] \rangle_{\text{усл}}, \\ \dots \dots \dots (10.9.2)$$

Здесь $x_{\alpha\tau} = x_\alpha(t + \tau)$, $x_\alpha = x_\alpha(t)$. Знак усреднения $\langle \dots \rangle_{\text{усл}}$ означает статистическое усреднение по $x_{\alpha\tau}$, $x_{\beta\tau}$, $x_{\gamma\tau}$, ... при фиксированных значениях компонент x_α , x_β , x_γ ...

«Обратное» кинетическое уравнение для плотности вероятности переходов имеет вид

$$- \frac{\partial W(\mathbf{x}^0, t_0 | \mathbf{x}, t)}{\partial t_0} = \hat{L}^+(\mathbf{x}^0, t_0) W(\mathbf{x}^0, t_0 | \mathbf{x}, t),$$

где сопряженный кинетический оператор равен

$$\hat{L}^+(\mathbf{x}, t) = K_\alpha(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2!} K_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \\ + \frac{1}{3!} K_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} + \dots (10.9.3)$$

Многомерный марковский процесс называется непрерывным, если отличными от нуля являются только одноиндексные и двухиндексные кинетические коэффициенты, т. е. $K_\alpha(\mathbf{x}, t)$ и $K_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$. Многомерный марковский процесс называется однородным во времени, если $K(\mathbf{x}, t) = K(\mathbf{x})$, и однородным в пространстве, если $K(\mathbf{x}, t) = K(t)$.

2. Для частного случая двумерного марковского процесса с компонентами $x_1 = x(t)$, $x_2 = y(t)$ прямые кинетические уравнения

имеют вид

$$\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial t} = \hat{L}(x, y, t) W(x, y, t),$$

$$\frac{\partial W(x_0, y_0, t_0 | x, y, t)}{\partial t} = \hat{L}(x, y, t) W(x_0, y_0, t_0 | x, y, t),$$

где кинетический оператор равен

$$\begin{aligned} \hat{L}(x, y, t) = & -\frac{\partial}{\partial x} K'_{10}(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial y} K'_{01}(x, y, t) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K'_{20}(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K'_{11}(x, y, t) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} K'_{02}(x, y, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} K'_{02}(x, y, t) - \\ & - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} K'_{30}(x, y, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} K'_{21}(x, y, t) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K'_{12}(x, y, t) - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial y^3} K'_{03}(x, y, t) + \dots + \\ & + \frac{(-1)^{n+m}}{n!m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} K'_{nm}(x, y, t) + \dots \end{aligned}$$

Здесь введены следующие упрощенные обозначения кинетических коэффициентов:

$$K'_{pq}(x, y, t) \equiv K_{\underbrace{11 \dots 1}_p \underbrace{22 \dots 2}_q}(x, y, t),$$

которые мы будем часто употреблять именно для *двумерного* марковского процесса.

Пример 10.9.1. Случайный процесс $x(t)$, описываемый уравнением $\ddot{x} = \xi(t)$, где $\xi(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с интенсивностью $\mathcal{D}$, есть немарковский процесс. Если, однако, ввести случайный процесс $y = \dot{x}$ и рассматривать два уравнения первого порядка $dx/dt = y$, $dy/dt = \xi(t)$, то совокупность $\{x, y\}$ будет марковской (как, впрочем, и процесс y). Кинетические коэффициенты этой совокупности равны

$$\begin{aligned} K'_{10}(x, y, t) &= y, \quad K'_{02}(x, y, t) = \mathcal{D}, \\ K'_{01}(x, y, t) &= K'_{11}(x, y, t) = K'_{20}(x, y, t) = 0. \end{aligned}$$

10.10. Уравнения кумулянтов многомерного марковского процесса

1. Найдем теперь уравнения эволюции моментов и кумулянтов многомерного марковского процесса. Производная по времени от среднего значения какой-либо функции $f(x, t)$ компонент многомерного марковского процесса равна

$$\frac{d \langle f(x, t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right\rangle + \langle \hat{L}^+ (x, t) f(x, t) \rangle.$$

Если функция непосредственно от времени не зависит, то

$$\frac{d\langle f(\mathbf{x}) \rangle}{dt} = \langle \hat{L}^+ (\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}) \rangle. \quad (10.10.1)$$

Приведенные формулы полностью аналогичны (10.6.1), (10.6.2).

2. Выбирая в качестве $f(\mathbf{x})$ произведения вида $x_\alpha^{n_\alpha} x_\beta^{n_\beta} \cdot$

$\cdot \dots \cdot x_\omega^{n_\omega}$ и принимая во внимание формулу (10.9.3) для сопряженного кинетического оператора, с помощью (10.10.1) нетрудно записать уравнения эволюции для любых моментов многомерного марковского процесса.

Так, для одной компоненты марковского процесса получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_\alpha \rangle &= \langle K_\alpha (\mathbf{x}, t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle x_\alpha^2 \rangle &= 2 \langle x_\alpha \cdot K_\alpha (\mathbf{x}, t) \rangle + \langle K_{\alpha\alpha} (\mathbf{x}, t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle x_\alpha^3 \rangle &= 3 \langle x_\alpha^2 \cdot K_\alpha (\mathbf{x}, t) \rangle + 3 \langle x_\alpha \cdot K_{\alpha\alpha} (\mathbf{x}, t) \rangle + \\ &+ \langle K_{\alpha\alpha\alpha} (\mathbf{x}, t) \rangle, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \langle x_\alpha^n \rangle &= \sum_{l=1}^n C_n^l \langle x_\alpha^{n-l} \cdot \underbrace{K_{\alpha\alpha\dots\alpha}}_l (\mathbf{x}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (10.10.2)$$

Для двух компонент уравнение моментов

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_\alpha x_\beta \rangle &= \langle x_\alpha \cdot K_\beta (\mathbf{x}, t) \rangle + \langle x_\beta \cdot K_\alpha (\mathbf{x}, t) \rangle + \\ &+ \langle K_{\alpha\beta} (\mathbf{x}, t) \rangle \end{aligned}$$

можно записать короче, если ввести скобки симметризации и проводить симметризацию по индексам:

$$\frac{d}{dt} \langle x_\alpha x_\beta \rangle = 2 \{ \langle x_\alpha \cdot K_\beta (\mathbf{x}, t) \rangle \}_s + \langle K_{\alpha\beta} (\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (10.10.3)$$

Очевидно, что если положить здесь $\alpha = \beta$, то (10.10.3) перейдет во вторую формулу (10.10. 2). Аналогично найдем, что, например,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_\alpha^2 x_\beta \rangle &= 2 \langle x_\alpha x_\beta K_\alpha (\mathbf{x}, t) \rangle + \langle x_\alpha^2 K_\beta (\mathbf{x}, t) \rangle + \\ &+ 2 \langle x_\alpha K_{\alpha\beta} (\mathbf{x}, t) \rangle + \langle x_\beta K_{\alpha\alpha} (\mathbf{x}, t) \rangle + \langle K_{\alpha\alpha\beta} (\mathbf{x}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (10.10.4)$$

Для трех компонент марковского процесса будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_\alpha x_\beta x_\gamma \rangle &= 3 \{ \langle x_\alpha x_\beta K_\gamma (\mathbf{x}, t) \rangle \}_s + \\ &+ 3 \{ \langle x_\alpha K_{\beta\gamma} (\mathbf{x}, t) \rangle \}_s + \langle K_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{x}, t) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда при $\alpha = \beta = \gamma$ получим третью формулу (10.10.2), а при $\alpha = \gamma$ формулу (10.10.4)

Эволюция произвольного момента многомерного марковского процесса определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} \langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_n} \rangle = \sum_{l=1}^n C_n^l \{ \langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_{n-l}} \times \times K_{\alpha_{n-l+1} \alpha_{n-l+2} \dots \alpha_n} (x, t) \rangle_s \}. \quad (10.10.5)$$

Для частного случая двумерного марковского процесса с компонентами $\{x(t), y(t)\}$ последняя формула принимает вид

$$\frac{d}{dt} \langle x^n y^m \rangle = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m C_n^p C_m^q \langle x^{n-p} y^{m-q} K'_{pq}(x, y, t) \rangle. \quad (10.10.6)$$

3. Переход от уравнений эволюции для моментов многомерного марковского процесса к уравнениям для кумулянтов осуществляется по тому же принципу, что и для одномерного марковского процесса: моментные скобки в обеих частях уравнений заменяются на кумулянтные.

Для одной компоненты марковского процесса вместо (10.10.2) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_\alpha \rangle &= \langle K_\alpha(x, t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle x_\alpha, x_\alpha \rangle &= 2 \langle x_\alpha, K_\alpha(x, t) \rangle + \langle K_{\alpha\alpha}(x, t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle x_\alpha, x_\alpha, x_\alpha \rangle &= 3 \langle x_\alpha, x_\alpha, K_\alpha(x, t) \rangle + \\ &+ 3 \langle x_\alpha, K_{\alpha\alpha}(x, t) \rangle + \langle K_{\alpha\alpha\alpha}(x, t) \rangle, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \underbrace{\langle x_\alpha, x_\alpha, \dots, x_\alpha \rangle}_n &= \sum_{l=1}^n C_n^l \langle x_\alpha^{[n-l]}, \underbrace{K_{\alpha\alpha \dots \alpha}}_l(x, t) \rangle \end{aligned} \quad (10.10.7)$$

Для двух компонент вместо (10.10.3) и (10.10.4) найдем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_\alpha, x_\beta \rangle &= 2 \{ \langle x_\alpha, K_\beta(x, t) \rangle \}_s + \langle K_{\alpha\beta}(x, t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle x_\alpha, x_\alpha, x_\beta \rangle &= 2 \langle x_\alpha, x_\beta, K_\alpha(x, t) \rangle + \\ &+ \langle x_\alpha, x_\alpha, K_\beta(x, t) \rangle + 2 \langle x_\alpha, K_{\alpha\beta}(x, t) \rangle + \langle x_\beta, \\ &K_{\alpha\alpha}(x, t) \rangle + \langle K_{\alpha\alpha\beta}(x, t) \rangle. \end{aligned} \quad (10.10.8)$$

Для трех компонент

$$\frac{d}{dt} \langle x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \rangle = 3 \{ \langle x_\alpha, x_\beta, K_\gamma(x, t) \rangle \}_s + \\ + 3 \{ \langle x_\alpha, K_{\beta\gamma}(x, t) \rangle \}_s + \langle K_{\alpha\beta\gamma}(x, t) \rangle.$$

Для n компонент

$$\frac{d}{dt} \langle x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n} \rangle = \\ = \sum_{l=1}^n C_n^l \{ \langle x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{n-l}}, K_{\alpha_{n-l+1} \alpha_{n-l+2} \dots \alpha_n}(x, t) \rangle \}_s. \quad (10.10.9)$$

Для частного случая двумерного марковского процесса вместо (10.10.6) будем иметь

$$\frac{d}{dt} \langle x^{[n]}, y^{[m]} \rangle = \\ = \sum_{p=0}^n \sum_{\substack{q=0 \\ p+q>0}}^m C_n^p C_m^q \langle x^{[n-p]}, y^{[m-q]}, K'_{pq}(x, y, t) \rangle. \quad (10.10.10)$$

В том случае, когда двумерный марковский процесс непрерывен, так что отличными от нуля являются только кинетические коэффициенты K'_{10} , K'_{01} , K'_{20} , K'_{11} , K'_{02} , общая формула (10.10.10) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \langle x^{[n]}, y^{[m]} \rangle = n \langle x^{[n-1]}, y^{[m]}, K'_{10} \rangle + \\ + m \langle x^{[n]}, y^{[m-1]}, K'_{01} \rangle + \frac{n(n-1)}{2} \langle x^{[n-2]}, y^{[m]}, K'_{20} \rangle + \\ + nm \langle x^{[n-1]}, y^{[m-1]}, K'_{11} \rangle + \frac{m(m-1)}{2} \langle x^{[n]}, y^{[m-2]}, K'_{02} \rangle. \quad (10.10.11)$$

Пример 10.10.1. Для случайного процесса, рассмотренного в примере 10.9.1, из (10.10.11) получаем следующие кинетические уравнения для кумулянтов:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_2^x &= 2\kappa_{1,1}^{x,y}, & \dot{\kappa}_{1,1}^{x,y} &= \kappa_2^y, & \dot{\kappa}_2^y &= 0, \\ \dot{\kappa}_3^x &= 3\kappa_{2,1}^{x,y}, & \dot{\kappa}_{2,1}^{x,y} &= 2\kappa_{1,2}^{x,y}, & \dot{\kappa}_{1,2}^{x,y} &= \kappa_3^y, & \dot{\kappa}_3^y &= 0, \\ \dot{\kappa}_4^x &= 4\kappa_{3,1}^{x,y}, & \dot{\kappa}_{3,1}^{x,y} &= 3\kappa_{2,2}^{x,y}, & \dot{\kappa}_{2,2}^{x,y} &= 2\kappa_{1,3}^{x,y}, \\ & & \dot{\kappa}_{1,3}^{x,y} &= \kappa_4^y, & \dot{\kappa}_4^y &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения при произвольных начальных условиях, находим, в частности,

$$\begin{aligned} \kappa_1^x &= (\kappa_1^x)_0 + (\kappa_1^y)_0 t, \\ \kappa_2^x &= (\kappa_2^x)_0 + 2(\kappa_{1,1}^{x,y})_0 t + (\kappa_2^y)_0 t^2 + \frac{2}{3} \mathcal{D} t^3, \end{aligned}$$

$$\kappa_3^x = (\kappa_3^x)_0 + 3 (\kappa_{2,1}^{x,y})_0 t + 3 (\kappa_{1,2}^{x,y})_0 t^2 + (\kappa_3^y)_0 t^3,$$

$$\kappa_s^x = (\kappa_s^x)_0 + s (\kappa_{s-1,1}^{x,y})_0 t + \dots + C_s^k (\kappa_{s-k}^{x,y})_0 t^k + \dots + (\kappa_s^y)_0 t^s.$$

Мы получили полную картину эволюции статистических свойств случайного процесса $x(t)$, представленного дифференциальным уравнением $\ddot{x} = \xi$. Прежде всего, видно, что при произвольных начальных условиях $x(t)$ не является гауссовым процессом и не стремится к нему при возрастании времени. Вместе с этим если рассмотреть относительные значения кумулянтов, т. е. кумулянтные коэффициенты γ_s , то происходит нормализация нормированного процесса, ибо γ_s уменьшается, как $t^{-s/2}$. Интересно отметить также, что гауссов случайный процесс $\xi(t)$ вносит вклад (коэффициент $\mathcal{D}$) только во второй кумулянт κ_2^x , в то время как эволюция высших кумулянтов определяется лишь начальными условиями. Если начальные условия таковы, что $x(t)$ при $t = 0$ является гауссовым, то гауссовость сохраняется и для $t > 0$.

4. В заключение параграфа запишем на основании (10.10.5) и (10.10.9) две эквивалентные системы уравнений, определяющих установившиеся значения моментов и кумулянтов многомерного марковского процесса, т. е. уравнения, связывающие моменты и кумулянты стационарного многомерного марковского процесса с его кинетическими коэффициентами.

Первая система:

$$\langle K_\alpha \rangle = 0,$$

$$2\{\langle x_\alpha K_\beta \rangle\}_s + \langle K_{\alpha\beta} \rangle = 0,$$

$$3\{\langle x_\alpha x_\beta K_\gamma \rangle\}_s + 3\{\langle x_\alpha K_{\beta\gamma} \rangle\}_s + \langle K_{\alpha\beta\gamma} \rangle = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{l=1}^n C_n^l \{\langle x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_{n-l}} K_{\alpha_{n-l+1} \alpha_{n-l+2} \dots \alpha_n} \rangle\}_s = 0.$$

(10.10.12)

Вторая система:

$$\langle K_\alpha \rangle = 0,$$

$$2\{\langle x_\alpha, K_\beta \rangle\}_s + \langle K_{\alpha\beta} \rangle = 0,$$

$$3\{\langle x_\alpha, x_\beta, K_\gamma \rangle\}_s + 3\{\langle x_\alpha, K_{\beta\gamma} \rangle\}_s + \langle K_{\alpha\beta\gamma} \rangle = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{l=1}^n C_n^l \{\langle x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{n-l}}, K_{\alpha_{n-l+1} \alpha_{n-l+2} \dots \alpha_n} \rangle\}_s = 0.$$

(10.10.13)

10.11. Кинетические уравнения кумулянтных функций многомерного марковского процесса

1. Двумоментная плотность вероятности многомерного марковского процесса

$$W(x^0, t_0; x, t) = W(x^0, t_0) W(x^0, t_0 | x, t)$$

на основании (10.9.1) удовлетворяет тому же кинетическому уравнению, что и плотность вероятности переходов:

$$\frac{\partial W(x^0, t_0; x, t)}{\partial t} = \hat{L}(x, t) W(x^0, t_0; x, t).$$

Если кинетический оператор не зависит от времени и мы рассматриваем стационарный марковский процесс $x(t)$, то

$$W(x^0, t_0; x, t) = W(x^0; x, t - t_0) \text{ и тогда}$$

$$\frac{\partial W(x_1; x_2, \tau)}{\partial \tau} = \hat{L}(x_2) W(x_1; x_2, \tau). \quad (10.11.1)$$

2. Это кинетическое уравнение дает возможность записать уравнения эволюции моментных и кумулянтных функций стационарного многомерного марковского процесса. Для среднего значения произвольной функции $f(x, x_\tau)$, где $x = x(t)$, $x_\tau = x(t + \tau)$, на основании (10.11.1) имеем уравнение

$$\frac{d \langle f(x, x_\tau) \rangle}{d\tau} = \langle \hat{L}^+(x_\tau) f(x, x_\tau) \rangle, \quad (10.11.2)$$

обобщающее (10.7.2) на многомерный процесс. Полагая,

$$f(x, x_\tau) = x_a x_{b\tau}; \quad x_a x_{a\tau} x_{b\tau};$$

$$x_a^n \cdot x_{b\tau}^m; \quad x_a^n x_{b\tau}^m \cdot \dots \cdot x_z^n x_{a\tau}^m x_{b\tau}^m \cdot \dots \cdot x_{y\tau}^m \text{ и т. п.,}$$

где через $x_a, x_b, \dots, x_z$ обозначены компоненты x , а τ указывает на компоненты x_τ , найдем с помощью (10.11.2) и (10.9.3) [$K_{a\tau} \equiv K_a(x_\tau)$, $K_{ab\tau} \equiv K_{ab}(x_\tau)$, ..., x — произвольная компонента x]:

$$\frac{d}{d\tau} \langle x x_{a\tau} \rangle = \langle x K_{a\tau} \rangle,$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle x x_{a\tau} x_{b\tau} \rangle = \langle x x_{a\tau} K_{b\tau} \rangle + \langle x x_{b\tau} K_{a\tau} \rangle + \langle x K_{ab\tau} \rangle,$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle x x_{a\tau} x_{b\tau} x_{c\tau} \rangle = 3 \{ \langle x x_{a\tau} x_{b\tau} K_{c\tau} \rangle \}_s +$$

$$+ 3 \{ \langle x x_{a\tau} K_{bc\tau} \rangle \}_s + \langle x K_{abc\tau} \rangle \quad (10.11.3)$$

и (симметризация идет по буквенным индексам)

$$\frac{d}{d\tau} \langle x x_{a_1\tau} x_{a_2\tau} \cdot \dots \cdot x_{a_n\tau} \rangle =$$

$$= \sum_{l=1}^n C_l^n \{ \langle x x_{a_1\tau} x_{a_2\tau} \cdot \dots \cdot x_{a_{n-l}\tau} K_{a_{n-l+1} \dots a_n}(x_\tau) \rangle \}_s. \quad (10.11.4)$$

Далее можно найти

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \langle x_a^n x_{b\tau}^m \rangle &= \sum_{l=1}^m C_m^l \langle x_a^n x_{b\tau}^{m-l} \underbrace{K_{bb \dots b}}_l(x_\tau) \rangle, \\ \frac{d}{d\tau} \langle x_a^n x_b^{n_b} \dots x_y^{n_y} x_{z\tau}^m \rangle &= \sum_{l=1}^m C_m^l \langle x_b^{n_b} x_b^{n_b} \dots x_y^{n_y} x_{z\tau}^{m-l} \times \\ &\times \underbrace{K_{z \dots z}}_l(x_\tau) \rangle.\end{aligned}$$

В общем случае ($p_a + p_b + \dots + p_z > 0$)

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \langle x_\alpha^{n_\alpha} x_\beta^{n_\beta} \dots x_\delta^{n_\delta} x_{a\tau}^{m_a} x_{b\tau}^{m_b} \dots x_{z\tau}^{m_z} \rangle &= \\ &= \sum_{p_a=0}^{m_a} \sum_{p_b=0}^{m_b} \dots \sum_{p_z=0}^{m_z} C_{m_a}^{p_a} C_{m_b}^{p_b} \dots C_{m_z}^{p_z} \langle x_\alpha^{n_\alpha} x_\beta^{n_\beta} \dots \\ &\dots x_\delta^{n_\delta} x_{a\tau}^{m_a-p_a} x_{b\tau}^{m_b-p_b} \dots x_{z\tau}^{m_z-p_z} \underbrace{K_{a \dots a}}_{p_a} \underbrace{b \dots b}_{p_b} \dots \underbrace{z \dots z}_{p_z}(x_\tau) \rangle.\end{aligned}\quad (10.11.5)$$

3. Для двумерного марковского процесса $\{x(t), y(t)\}$ уравнение моментной функции общего вида на основании (10.11.5) таково:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \langle x^n y^m x_\tau^r y_\tau^s \rangle &= \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{\substack{l=0 \\ k+l>0}}^s C_r^k C_s^l \langle x^n y^m x_\tau^{r-k} y_\tau^{s-l} K'_{kl}(x_\tau, y_\tau) \rangle.\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \langle x^n x_\tau^m \rangle &= \sum_{l=1}^m C_m^l \langle x^n x_\tau^{m-l} K'_{l0}(x_\tau, y_\tau) \rangle, \\ \frac{d}{d\tau} \langle x^n y_\tau^m \rangle &= \sum_{l=1}^m C_m^l \langle x^n y_\tau^{m-l} K'_{0l}(x_\tau, y_\tau) \rangle, \\ \frac{d}{d\tau} \langle y^n x_\tau^m \rangle &= \sum_{l=1}^m C_m^l \langle y^n x_\tau^{m-l} K'_{l0}(x_\tau, y_\tau) \rangle, \\ \frac{d}{d\tau} \langle y^n y_\tau^m \rangle &= \sum_{l=1}^m C_m^l \langle y^n y_\tau^{m-l} K'_{0l}(x_\tau, y_\tau) \rangle.\end{aligned}$$

Уравнения для важнейших характеристик двумерного марковского процесса — корреляционных функций — имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} K_x[\tau] = \langle x K'_{l0}(x_\tau, y_\tau) \rangle,$$

$$\frac{d}{d\tau} K_y[\tau] = \langle y K'_{01}(x_\tau, y_\tau) \rangle. \quad (10.11.6)$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle x, x_{a\tau} \rangle = \langle x, K_{a\tau} \rangle,$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle x, x_{a\tau}, x_{b\tau} \rangle = \langle x, x_{a\tau}, K_{b\tau} \rangle + \langle x, x_{b\tau}, K_{a\tau} \rangle + \langle x, K_{ab\tau} \rangle,$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle x, x_{a\tau}, x_{b\tau}, x_{c\tau} \rangle = 3 \{ \langle x, x_{a\tau}, x_{b\tau}, K_{c\tau} \rangle \}_s + \\ + 3 \{ \langle x, x_{a\tau}, K_{bc\tau} \rangle \}_s + \langle x, K_{abc\tau} \rangle,$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle x, x_{a_1} \tau, \dots, x_{a_m} \tau \rangle =$$

$$= \sum_{l=1}^m C_m^l \{ \langle x, x_{a_1 \tau}, \dots, x_{a_l \tau}, K_{a_{m-l+1} \dots a_m} (x_\tau) \rangle_s \}. \quad (10.11.7)$$

Чтобы от уравнений эволюции (10.11.7) перейти к кинетическим уравнениям, которые в конце концов нас и интересуют, необходимо правые части (10.11.7) выразить через кумулянтные функции марковского многомерного процесса. Для этого следует провести операцию размыкания кумулянтных скобок, воспользовавшись результатами, полученными в § 4.7, и учесть, что кумулянты стационарного марковского процесса подчиняются уравнениям (10.10.13).

Начнем с первой формулы (10.11.7). Используя формулу (4.7.10) и полагая в ней $f(y) = K_a(x_\tau)$, придем к следующему кинетическому уравнению для совместной кумулянтной функции второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle x, x_{a\tau} \rangle &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n \geq 0}^{\infty} \sum_{k_2+\dots+k_n \geq 0}^{\infty} \dots \sum_{k_n \geq 0}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \times \\ &\times \left\langle \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} K_a(x) \right\rangle \mathcal{K}_{1,k_1,\dots,k_n}^{x,x_{1\tau},\dots,x_{n\tau}}. \end{aligned} \quad (10.11.8)$$

Таким образом, эволюция совместной ковариационной функции $B_{xx_a}[\tau]$ определяется всеми кумулянтными функциями многомерного марковского процесса

$$\langle x, x_{1\tau}^{[k_1]}, x_{2\tau}^{[k_2]}, \dots, x_{n\tau}^{[k_n]} \rangle \equiv \kappa_{1,k_1, \dots, k_n}^{x, x_{1\tau}, \dots, x_{n\tau}}.$$

Вторая формула (10.11.7) приводит нас с помощью (4.7.10), (4.7.18) и с учетом (10.10.13) к кинетическому уравнению для совместных кумулянтных функций третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x, x_{a\tau}, x_{b\tau} \rangle &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n \geq 0}^{\infty} \sum_{k_1}^{\infty} \sum_{k_2}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \times \\ &\left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} [2 \{ (x_a, K_b(x)) \}_s + K_{ab}(x)] \right\rangle \times \\ &\times \kappa_{1,k_1, \dots, k_n}^{x, x_{1\tau}, \dots, x_{n\tau}}. \end{aligned} \quad (10.11.9)$$

Совершенно аналогично при использовании (4.7.19) и (10.10.13) третья формула (10.11.7) для кумулянтных функций четвертого порядка примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle x, x_{a\tau}, x_{b\tau}, x_{c\tau} \rangle &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n \geq 0}^{\infty} \sum_{k_1}^{\infty} \sum_{k_2}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \times \\ &\times \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} [3 \{ (x_a, x_b, K_c(x)) \}_s + 3 \{ (x_a, K_{bc}(x)) \}_s + \right. \\ &\left. + K_{abc}(x) \right] \right\rangle \kappa_{1,k_1, \dots, k_n}^{x, x_{1\tau}, \dots, x_{n\tau}}. \end{aligned} \quad (10.11.10)$$

Наконец, в общем случае с помощью (4.7.20) и (10.10.13) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x, x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_{m\tau}} \rangle &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n \geq 0}^{\infty} \sum_{k_1}^{\infty} \sum_{k_2}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \times \\ &\times \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \sum_{l=1}^m C_m^l \{ (x_{a_1}, x_{a_2}, \dots \right. \\ &\left. \dots, x_{a_{m-l}}, K_{a_{m-l+1} a_{m-l+2} \dots a_m}(x) \} \}_s \right\rangle \kappa_{1,k_1, \dots, k_n}^{x, x_{1\tau}, \dots, x_{n\tau}}. \end{aligned} \quad (10.11.11)$$

Таким образом, и для многомерного марковского процесса кинетические уравнения кумулянтных функций являются линейными. При этом и в левые, и в правые части уравнений (10.11.8) — (10.11.11) входят одни и те же кумулянтные функции: их первый аргумент берется в момент времени t , а все остальные аргументы (одинаковые или различные) в момент $t + \tau$.

И если теперь последовательность кумулянтных функций оборвать на каком-либо порядке (а это единственный практический способ их отыскания), т. е. если использовать модельное приближение какого-либо порядка для исследуемого марковского процесса, то полученная конечная система уравнений будет замкнутой.

Интересно отметить также, что если бы мы захотели записать кинетические уравнения для моментных функций, то мы получили бы и для них систему линейных уравнений. В самом деле, используя (3.4.6), где следует положить $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = x_{1\tau}^{k_1} x_{2\tau}^{k_2} \cdot \dots \cdot x_{n\tau}^{k_n}$, нетрудно найти следующее разложение моментной функции через кумулянтные (x — произвольная компонента x):

$$\alpha_{1, k_1, \dots, k_n}^{x, x_{1\tau}, \dots, x_{n\tau}} = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} C_{k_1}^{l_1} C_{k_2}^{l_2} \dots C_{k_n}^{l_n} \langle x_1^{k_1-l_1} \times \\ \times x_2^{k_2-l_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n-l_n} \rangle_{x_{1, k_1, \dots, k_n}}^{x, x_{1\tau}, \dots, x_{n\tau}}. \quad (10.11.12)$$

Эта формула четко показывает взаимную линейную связь между моментными и кумулянтными функциями рассматриваемого вида. Тем самым, линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка для кумулянтных функций (10.11.8) — (10.11.11) с помощью (10.11.12) перейдут в линейную же систему кинетических уравнений и для моментных функций.

5. Для двумерного стационарного марковского процесса $\{x(t), y(t)\}$ кинетические уравнения для кумулянтных функций второго, третьего и четвертого порядков на основании (10.11.8) — (10.11.10) принимают следующий вид:

$$\frac{d}{d\tau} \langle u, x_{a\tau} \rangle = \sum_{n+m>0} \sum_{n! m!} \frac{1}{n! m!} \left\langle \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} K_a(x, y) \right\rangle \chi_{1, n, m}^{u, x_{\tau}, y_{\tau}}, \quad (10.11.13)$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle u, x_{a\tau}, x_{b\tau} \rangle = \\ = \sum_{n+m>0} \sum_{n! m!} \frac{1}{n! m!} \left\langle \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} [2 \{x_a, K_b(x, y)\}_s + \right. \\ \left. + K_{ab}(x, y)] \right\rangle \chi_{1, n, m}^{u, x_{\tau}, y_{\tau}}, \quad (10.11.14)$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle u, x_{a\tau}, x_{b\tau}, x_{c\tau} \rangle = \\ = \sum_{n+m>0} \sum_{n! m!} \frac{1}{n! m!} \left\langle \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} [3 \{(x_a, x_b, K_c(x, y))\}_s + \right. \\ \left. + 3 \{(x_a, K_{bc}(x, y))\}_s + K_{abc}(x, y)] \right\rangle \chi_{1, n, m}^{u, x_{\tau}, y_{\tau}}. \quad (10.11.15)$$

В этих формулах

$$u = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}; \quad x_a = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}; \quad x_a, x_b = \begin{Bmatrix} x, x \\ x, y \\ y, y \end{Bmatrix};$$

$$x_a, x_b, x_c = \begin{Bmatrix} x, x, x \\ x, x, y \\ x, y, y \\ y, y, y \end{Bmatrix},$$

а кинетические коэффициенты соответственно принимают значения

$$K_a = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \end{Bmatrix}, \quad K_{ab} = \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{xy} \\ K_{yy} \end{Bmatrix}, \quad K_{abc} = \begin{Bmatrix} K_{xxx} \\ K_{xxy} \\ K_{xyy} \\ K_{yyy} \end{Bmatrix}.$$

Симметризация идет по буквенным индексам. Тем самым, формула (10.11.13) содержит четыре кинетических уравнения (для четырех ковариационных функций), формула (10.11.14) — шесть уравнений, а формула (10.11.15) — восемь.

Аналогичным образом на основании (10.11.11) могут быть записаны уравнения и для кумулянтных функций произвольного порядка.

6. Для удобства дальнейшего использования формул (10.11.13) — (10.11.15) приведем их в раскрытом виде для гауссова и эксцессного приближения двумерного стационарного марковского процесса $\{x(t), y(t)\}$.

В гауссовом приближении, когда отличными от тождественного нуля мы полагаем только кумулянтные функции второго порядка, уравнения (10.11.13) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle x, x_\tau \rangle &= \left\langle \frac{\partial K_x}{\partial x} \right\rangle \langle x, x_\tau \rangle + \left\langle \frac{\partial K_x}{\partial y} \right\rangle \langle x, y_\tau \rangle, \\ \frac{d}{d\tau} \langle x, y_\tau \rangle &= \left\langle \frac{\partial K_y}{\partial x} \right\rangle \langle x, x_\tau \rangle + \left\langle \frac{\partial K_y}{\partial y} \right\rangle \langle x, y_\tau \rangle, \\ \frac{d}{d\tau} \langle y, x_\tau \rangle &= \left\langle \frac{\partial K_x}{\partial x} \right\rangle \langle y, x_\tau \rangle + \left\langle \frac{\partial K_x}{\partial y} \right\rangle \langle y, y_\tau \rangle, \\ \frac{d}{d\tau} \langle y, y_\tau \rangle &= \left\langle \frac{\partial K_y}{\partial x} \right\rangle \langle y, x_\tau \rangle + \left\langle \frac{\partial K_y}{\partial y} \right\rangle \langle y, y_\tau \rangle. \end{aligned}$$

(10.11.16)

При записи кинетических уравнений для кумулянтных функций в эксцессном приближении во избежание излишней громоздкости мы

ограничимся раскрытием только правых частей уравнений. Так, формула (10.11.13) приводит к

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle u, x_{a\tau} \rangle = & \left\langle \frac{\partial K_a}{\partial x} \right\rangle \kappa_{1,1}^{u,x\tau} + \left\langle \frac{\partial K_a}{\partial y} \right\rangle \kappa_{1,1}^{u,y\tau} + \\ & + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 K_a}{\partial x^2} \right\rangle \kappa_{1,2}^{u,x\tau} + \left\langle \frac{\partial^2 K_a}{\partial x \partial y} \right\rangle \kappa_{1,1,1}^{u,x\tau,y\tau} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 K_a}{\partial y^2} \right\rangle \times \\ & \times \kappa_{1,2}^{u,y\tau} + \frac{1}{6} \left\langle \frac{\partial^3 K_a}{\partial x^3} \right\rangle \kappa_{1,3}^{u,x\tau} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^3 K_a}{\partial x^2 \partial y} \right\rangle \kappa_{1,2,1}^{u,x\tau,y\tau} + \\ & + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^3 K_a}{\partial x \partial y^2} \right\rangle \kappa_{1,1,2}^{u,x\tau,y\tau} + \frac{1}{6} \left\langle \frac{\partial^3 K_a}{\partial y^3} \right\rangle \kappa_{1,3}^{u,y\tau}. \quad (10.11.17) \end{aligned}$$

Уравнения для шести кумулянтных функций третьего порядка, вытекающие из (10.11.14), таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle u, x_{a\tau}, x_{b\tau} \rangle = & \left[\left\langle 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x_a, K_b) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_{ab}}{\partial x} \right\rangle \right] \times \\ & \times \kappa_{1,1}^{u,x\tau} + \left[\left\langle 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (x_a, K_b) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_{ab}}{\partial y} \right\rangle \right] \kappa_{1,1}^{u,y\tau} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left\langle 2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x_a, K_b) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 K_{ab}}{\partial x^2} \right\rangle \right] \kappa_{1,2}^{u,x\tau} + \\ & + \left[\left\langle 2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (x_a, K_b) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 K_{ab}}{\partial x \partial y} \right\rangle \right] \kappa_{1,1,1}^{u,x\tau,y\tau} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left\langle 2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x_a, K_b) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 K_{ab}}{\partial y^2} \right\rangle \right] \kappa_{1,2}^{u,y\tau} + \\ & + \frac{1}{6} \left[\left\langle 2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} (x_a, K_b) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^3 K_{ab}}{\partial x^3} \right\rangle \right] \kappa_{1,3}^{u,x\tau} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left\langle 2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} (x_a, K_b) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^3 K_{ab}}{\partial x^2 \partial y} \right\rangle \right] \kappa_{1,2,1}^{u,x\tau,y\tau} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left\langle 2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} (x_a, K_b) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^3 K_{ab}}{\partial x \partial y^2} \right\rangle \right] \kappa_{1,1,2}^{u,x\tau,y\tau} + \\ & + \frac{1}{6} \left[\left\langle 2 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial y^3} (x_a, K_b) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^3 K_{ab}}{\partial y^3} \right\rangle \right] \kappa_{1,3}^{u,y\tau}. \quad (10.11.18) \end{aligned}$$

При конкретизации компонент x_a, x_b следует воспользоваться формулами дифференцирования неполных кумулянтных скобок (2.8.11).

Уравнения для восьми кумулянтных функций четвертого порядка, получаемые из (10.11.15) в эксцессном приближении, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle u, x_{a\tau}, x_{b\tau}, x_{c\tau} \rangle = & \left[\left\langle 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x_a, x_b, K_c) \right\}_s \right\rangle + \right. \\ & \left. + \left\langle 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x_a, K_{bc}) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial K_{abc}}{\partial x} \right\rangle \right] \kappa_{1,1}^{u,x\tau} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left\langle 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (x_a, x_b, K_c) \right\}_s \right\rangle + \left\langle 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (x_a, K_{bc}) \right\}_s \right\rangle + \right. \\
& + \left\langle \frac{\partial K_{abc}}{\partial y} \right\rangle \left] \kappa_{1,1}^{u,y\tau} + \frac{1}{2} \left[\left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x_a, x_b, K_c) \right\}_s \right\rangle + \right. \\
& + \left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x_a, K_{bc}) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 K_{abc}}{\partial x^2} \right\rangle \left] \kappa_{1,2}^{u,x\tau} + \right. \\
& + \left[\left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (x_a, x_b, K_c) \right\}_s \right\rangle + \left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (x_a, K_{bc}) \right\}_s \right\rangle + \right. \\
& + \left\langle \frac{\partial^2 K_{abc}}{\partial x \partial y} \right\rangle \left] \kappa_{1,1,1}^{u,x\tau,y\tau} + \frac{1}{2} \left[\left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x_a, x_b, K_c) \right\}_s \right\rangle + \right. \\
& + \left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x_a, K_{bc}) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 K_{abc}}{\partial y^2} \right\rangle \left] \kappa_{1,2}^{u,y\tau} + \right. \\
& + \frac{1}{6} \left[\left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} (x_a, x_b, K_c) \right\}_s \right\rangle + \left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} (x_a, K_{bc}) \right\}_s \right\rangle + \right. \\
& + \left\langle \frac{\partial^3 K_{abc}}{\partial x^3} \right\rangle \left] \kappa_{1,3}^{u,x\tau} + \frac{1}{2} \left[\left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} (x_a, x_b, K_c) \right\}_s \right\rangle + \right. \\
& + \left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} (x_a, K_{bc}) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^3 K_{abc}}{\partial x^2 \partial y} \right\rangle \left] \kappa_{1,2,1}^{u,x\tau,y\tau} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[\left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} (x_a, x_b, K_c) \right\}_s \right\rangle + \left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} (x_a, K_{bc}) \right\}_s \right\rangle + \right. \\
& + \left\langle \frac{\partial^3 K_{abc}}{\partial x \partial y^2} \right\rangle \left] \kappa_{1,1,2}^{u,x\tau,y\tau} + \frac{1}{6} \left[3 \left\langle \left\{ \frac{\partial^3}{\partial y^3} (x_a, x_b, K_c) \right\}_s \right\rangle + \right. \\
& + \left\langle 3 \left\{ \frac{\partial^3}{\partial y^3} (x_a, K_{bc}) \right\}_s \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^3 K_{abc}}{\partial y^3} \right\rangle \left] \kappa_{1,3}^{u,y\tau}. \quad (10.11.19)
\end{aligned}$$

Здесь также необходимо воспользоваться формулами (2.8.11) для вычисления производных от неполных кумулянтных скобок при конкретизации компонент x_a, x_b, x_c .

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава 11

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

11.1. Представление линейной системы

1. Прежде чем анализировать статистические характеристики выходной переменной $x(t)$ линейной системы, на вход которой действует случайный процесс $y(t)$ (рис. 11.1), рассмотрим в этой главе общие соотношения, существующие между $x(t)$ и $y(t)$. Линейной системе с постоянными параметрами соответствуют линейные уравнения с постоянными коэффициентами, связывающие $x(t)$ с $y(t)$ (алгебраические, дифференциальные, интегральные или интегродифференциальные). Если ввести оператор дифференцирования $p \sim d/dt$, то указанную взаимосвязь всегда можно представить операторным уравнением

$$N(p)x(t) = M(p)y(t), \quad (11.1.1)$$

где $N(p)$, $M(p)$ — некоторые полиномы по p . Коэффициент при высшей степени оператора у полинома $N(p)$ выберем равным единице. Степени полиномов $N(p)$, $M(p)$ обозначим через n и m .

Если, например, рассмотреть системы, представленные на рис. 11.2 и 11.3, то для них $N(p) = p + a$, $M(p) = a$ и $N(p) = p + a$, $M(p) = p$ соответственно, где $a = 1/RC$.

2. Заменим правую часть уравнения (11.1.1) вспомогательной переменной

$$z(t) = M(p)y(t) \quad (11.1.2)$$

и рассмотрим сначала задачу отыскания выходной переменной $x(t)$ по $z(t)$ в соответствии с уравнением

$$N(p)x(t) = z(t). \quad (11.1.3)$$

Если в этом уравнении положить правую часть тождественно равной нулю, то мы получим уравнение

$$N(p)x(t) = 0, \quad (11.1.4)$$

которое определит $x_{\text{соб}}(t)$ — собственные процессы системы (11.1.3). Таким образом, $x_{\text{соб}}(t)$ есть общее решение однородного уравнения (11.1.4). Его n произвольных постоянных определяют заданием n начальных условий

$$x(t_0) \equiv x_0, \quad \dot{x}(t_0) \equiv \dot{x}_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) \equiv x_0^{(n-1)}. \quad (11.1.5)$$

В подавляющем большинстве случаев мы будем иметь дело с такими линейными системами (преобразованиями), для которых $x_{\text{соб}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ при любых начальных условиях. Такие системы называются устойчивыми.



Рис. 11.1.

Как известно, общее решение линейного неоднородного уравнения (11.1.3) складывается из общего решения однородного уравнения (11.1.4)

и частного решения неоднородного уравнения (11.1.3). Это частное решение представляет собой нечто иное, как *вынужденное* движение (решение) системы (11.1.3), порождаемое входным сигналом $z(t)$ и обращающееся тождественно в нуль при $z(t) \equiv 0$. Его мы будем обозначать $x_{\text{вын}}(t)$. Поэтому общее решение уравнения (11.1.3) запишется так:

$$x(t) = x_{\text{соб}}(t) + x_{\text{вын}}(t). \quad (11.1.6)$$

Как собственное, так и вынужденное движения системы могут быть выражены через так называемую *переходную функцию системы*

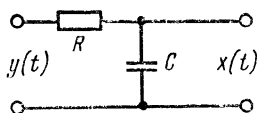


Рис. 11.2.

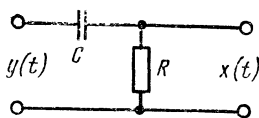


Рис. 11.3.

$\varphi(t)$, которая является откликом системы на дельта-воздействие, удовлетворяет уравнению (11.1.4) при начальных условиях

$$\varphi(0) = \varphi'_0 = \varphi''_0 = \dots = \varphi_0^{(n-2)} = 0, \quad \varphi_0^{(n-1)} = 1,$$

равна нулю для $t < 0$ и исчерпывающим образом представляет линейную систему, соответствующую (11.1.3). При начальных условиях (11.1.5) для $t \geq t_0$

$$x_{\text{соб}}(t) = A_1 \varphi^{(n-1)}(t - t_0) + A_2 \varphi^{(n-2)}(t - t_0) + \dots + A_n \varphi(t - t_0); \quad (11.1.7)$$

$$x_{\text{вын}}(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t - u) z(u) du = \int_0^{t-t_0} \varphi(u) z(t - u) du. \quad (11.1.8)$$

Коэффициенты A_k равны:

[illegible]

Итак, общее решение уравнения (11.1.3) при начальных условиях (11.1.5) для $t \geq t_0$ имеет вид

$$x(t) = A_1 \varphi^{(n-1)}(t-t_0) + A_2 \varphi^{(n-2)}(t-t_0) + \dots + \\ + A_n \varphi(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} \varphi(u) z(t-u) du. \quad (11.1.10)$$

Из (11.1.7) следует, что для устойчивой системы при неограниченном возрастании t должна стремиться к нулю как переходная функция системы, так и ее производные. Это, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения $N(\lambda) = 0$ имеют отрицательные вещественные части.

Если линейная система устойчива, то по истечении временного интервала $t - t_0$, много большего так называемой *постоянной времени* системы T_φ (которая определяется еще и как *время релаксации* $x_{\text{соб}}(t)$), собственное движение затухнет, и тогда

$$x(t) = \int_0^\infty \varphi(u) z(t-u) du. \quad (11.1.11)$$

Таким образом, (11.1.11) представляет собой *установившееся* вынужденное движение, не учитывающее, в отличие от (11.1.8), переходные процессы, обусловленные включением $z(t)$ в момент t_0 .

Итак, поставленная задача нахождения выходной переменной $x(t)$ через вспомогательную $z(t)$ полностью решена формулами (11.1.10), (11.1.11). Ниже мы будем рассматривать, главным образом, установившееся движение.

3. Прежде чем переходить к решению исходного уравнения (11.1.1), обратимся к уравнению (11.1.2), которое будем называть уравнением с дифференциальной правой частью, хотя, строго говоря, это вовсе не уравнение, поскольку неизвестная переменная $z(t)$ уже выражена через известную $y(t)$.

Хотя основная ценность вспомогательной переменной $z(t)$ заключается в том, что с ее помощью исходная задача разбивается на две независимые, уравнение для этой переменной имеет смысл и само по себе, поскольку оно является частным случаем линейного

преобразования (11.1.1), когда $N(p) \equiv 1$ и, следовательно, $x(t) = z(t)$.

Интересно отметить, что уравнения (11.1.2) и (11.1.3) являются в определенном смысле «обратными» друг другу. В самом деле, если в (11.1.2) неизвестным считать $y(t)$, а заданным $z(t)$, то мы фактически приходим к уравнению (11.1.3) и наоборот. Другими словами, в уравнении (11.1.1) мы с таким же основанием можем считать неизвестной переменную $y(t)$, а заданной $x(t)$. Общая постановка задачи линейного преобразования от этого не изменяется; в определенном смысле она обратима. Это полезное обстоятельство будет использовано далее.

4. Вернемся к исходному уравнению линейного преобразования (11.1.1), дифференциальный оператор правой части которого запишем в виде

$$M(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0.$$

В соответствии с (11.1.6) общее решение исходного уравнения складывается из собственного и вынужденного. Собственное решение уравнения (11.1.1) совпадает с собственным решением уравнения (11.1.3). Вынужденное решение исходного уравнения на основании (11.1.8) и (11.1.2) равно

$$x_{\text{вын}}(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t-u) \left[M\left(\frac{d}{du}\right) y(u) \right] du.$$

В общем случае соотношение между n и m — порядками операторов $N(p)$ и $M(p)$ — произвольно. Если $m < n$, то установившееся вынужденное решение имеет вид

$$x(t) = \int_0^{\infty} \varphi_M(u) y(t-u) du, \quad (11.1.12)$$

полностью совпадающий с (11.1.11), с той лишь разницей, что роль $\varphi(t)$ играет

$$\varphi_M(t) \equiv M\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi(t) = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k \varphi(t)}{dt^k}.$$

Пусть теперь $m \geq n$. В этом случае, как нетрудно показать, установившееся движение равно

$$x(t) = \mathcal{Y}(t) + \int_0^{\infty} \varphi_M(u) y(t-u) du, \quad (11.1.13)$$

где

$$\mathcal{Y}(t) \equiv \sum_{l=0}^{m-n} d_l \frac{d^l y(t)}{dt^l}, \quad d_l \equiv \sum_{k=n+l}^m b_k \varphi_0^{(k-l-1)}.$$

Таким образом, при $m \geq n$ в составе вынужденного решения появляются слагаемые, пропорциональные входному воздействию и его производным. Причем эти слагаемые уже не исчезают при $t - t_0 \gg T_\Phi$.

Пример 11.1.1. Для системы, изображенной на рис. 11.2, имеем $N(p) = p + a$, $M(p) = a$ ($n = 1$, $m = 0$, $b_0 = a$). Нетрудно найти, что $\varphi(t) = e^{-at} \cdot 1(t)$, $\varphi_M(t) = ae^{-at} \cdot 1(t)$. Таким образом, для этой системы

$$x(t) = x_0 e^{-a(t-t_0)} + a \int_0^{t-t_0} e^{-au} y(t-u) du. \quad (11.1.14)$$

Установившееся движение имеет вид

$$x(t) = a \int_0^\infty e^{-au} y(t-u) du.$$

Пример 11.1.2. Для системы, изображенной на рис. 11.3, $N(p) = p + a$, $M(p) = p$ ($n = m = 1$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$) и по-прежнему $\varphi(t) = e^{-at} \cdot 1(t)$. Однако теперь $\varphi_M(t) = -ae^{-at} \cdot 1(t)$.

Следовательно, установившееся движение равно

$$x(t) = y(t) - a \int_0^\infty e^{-au} y(t-u) du.$$

11.2. Моментные функции и частотные характеристики линейной системы

1. Рассмотрим подробнее переходную функцию линейной устойчивой системы $\varphi(t)$. Поскольку эта функция является собственным решением дифференциального уравнения (11.1.4), она затухает со временем не медленнее, чем $t^k e^{-bt}$, где k не превышает порядка дифференциального оператора $N(p)$, а b — некоторая положительная постоянная. Это ведет к тому, что интеграл от ее квадрата конечен. Это значит, что функция $\varphi(t)$ может быть отнесена к первой группе сигналов и для нее может быть построена функция корреляции первого рода [35]

$$\Psi_\varphi(\tau) \equiv \int_{-\infty}^\infty \varphi(t) \varphi(t+\tau) dt = \int_0^\infty \varphi(t) \varphi(t+\tau) dt, \quad (11.2.1)$$

которую назовем *корреляционной функцией системы*. Она обладает всеми необходимыми свойствами функции корреляции и описывает временные свойства собственных процессов линейной системы.

Совершенно также может быть введена функция корреляции и для $\varphi_M(t)$:

$$\Psi_{\varphi_M}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^\infty \varphi_M(t) \varphi_M(t+\tau) dt.$$

2. Определим теперь *коэффициент передачи* системы, соответствующей преобразованию (11.1.3), который должен однозначно

выражаться через $\varphi(t)$. Пусть $z(t) = e^{j\omega t}$, тогда на основании (11.1.11)

$$x(t) = \int_0^{\infty} \varphi(u) e^{j\omega(t-u)} du = e^{j\omega t} \int_0^{\infty} \varphi(u) e^{-j\omega u} du.$$

Следовательно, по определению, коэффициент передачи, равный

$$K(j\omega) = \frac{x(t)}{z(t)} \Big|_{z=e^{j\omega t}} = \int_0^{\infty} \varphi(u) e^{-j\omega u} du \equiv 2\pi \hat{\varphi}(\omega), \quad (11.2.2)$$

пропорционален коэффициенту Фурье переходной функции. Записывая

$$K(j\omega) \equiv |K(j\omega)| e^{i\psi(\omega)},$$

мы имеем, опять по определению, $|K(j\omega)|^2$ — *частотную* и $\psi(\omega)$ — *фазовую* характеристики линейной системы.

Поскольку каждой функции корреляции соответствует некоторый спектр, то можно поставить вопрос о том, какой же спектр соответствует функции корреляции $\Psi_{\varphi}(\tau)$? Так как $\varphi(t)$ принадлежит к первой группе сигналов, то следует искать *спектр энергии* этой функции, который может быть легко найден через ее коэффициент Фурье (см. [35]). Имея в виду (11.2.2), получаем

$$\mathfrak{D}_{\varphi}(\omega) = 2\pi |\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} |K(j\omega)|^2. \quad (11.2.3)$$

Таким образом, спектр энергии переходной функции является преобразованием Фурье функции корреляции системы

$$\mathfrak{D}_{\varphi}(\omega) = \mathcal{F}\{\Psi(\tau); -\omega\tau\} \quad (11.2.4)$$

и пропорционален ее частотной характеристике.

3. Для переходной функции системы существуют две характерные длительности. Прежде всего — это эффективная длительность самого отклика системы на дельта-воздействие — *время релаксации* системы:

$$T_{\varphi} \equiv \frac{1}{\varphi_0^2} \int_0^{\infty} \varphi^2(t) dt. \quad (11.2.5)$$

Здесь через φ_0 обозначено $\max \max \varphi(t)$, $t \in [0, \infty)$.

Кроме этого, существование функции корреляции (11.2.1) позволяет ввести *время корреляции* системы [ср. с (7.3.7)]

$$\tau_{\varphi} \equiv \frac{1}{\Psi_{\varphi}^2(0)} \int_0^{\infty} \Psi_{\varphi}^2(t) dt. \quad (11.2.6)$$

В общем случае T_{φ} и τ_{φ} различны. Если $T_{\varphi} \sim \tau_{\varphi}$, то будем говорить, что имеется система *простого* типа, если же $T_{\varphi} \gg \tau_{\varphi}$ — система *сложного* типа. Очевидно, что случая $T_{\varphi} \ll \tau_{\varphi}$ быть не может.

Можно ввести еще понятие *полосы системы* как величину, обратную времени корреляции системы: $\Pi_{\varphi} \equiv \tau_{\varphi}^{-1}$. Тогда для систем простого типа $\Pi_{\varphi} T_{\varphi} \sim 1$, а для систем сложного типа $\Pi_{\varphi} T_{\varphi} \gg 1$.

4. Если теперь обратиться к общему уравнению линейного преобразования (11.1.1), то коэффициент передачи такой системы можно найти, рассматривая установившееся решение (11.1.12) (для $m < n$) или (11.1.13) (для $m \geq n$).

Для $t < n$

$$K(j\omega) = \frac{x(t)}{y(t)} \bigg|_{y(t) = e^{j\omega t}} = \int_0^{\infty} \varphi_M(u) e^{-j\omega u} du = 2\pi \hat{\varphi}_M(\omega).$$

Если $m \geq n$,

$$K(j\omega) = \sum_{l=0}^{m-n} (j\omega)^l d_l + 2\pi \hat{\varphi}_M(\omega).$$

При $m < n$ частотная характеристика линейной системы также является сопряженной Фурье функции корреляции

$$|K(j\omega)|^2 = 2\pi \mathfrak{D}_{\varphi_M}(\omega) = 2\pi \mathcal{F}\{\Psi_{\varphi_M}(\tau); -\omega\tau\}$$

в отличие от случая $m \geq n$, для которого не удастся найти такую простую связь $|K(j\omega)|^2$ с $\Psi_{\Phi_M}(\tau)$.

5. Введем теперь *моментные функции системы*. Функцию корреляции системы (11.2.1) можно рассматривать как моментную функцию второго порядка. Эта моментная функция есть по существу *временная* моментная функция, поскольку вместо усреднения по ансамблю стоит интегрирование по времени и это интегрирование (а не усреднение по времени) связано с тем, что функция $\varphi(t)$ принадлежит, как уже говорилось, к первой группе сигналов, обладающих конечной энергией.

В общем случае моментные функции линейной системы, представленной переходной функцией $\varphi(t)$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_1^\Psi &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt, \\
a_2^\Psi(\tau_2) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(t + \tau_2) dt, \\
a_3^\Psi(\tau_2, \tau_3) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(t + \tau_2) \varphi(t + \tau_3) dt, \\
&\dots\dots\dots \\
a_s^\Psi(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(t + \tau_2) \varphi(t + \tau_3) \cdot \dots \cdot \\
&\cdot \varphi(t + \tau_s) dt.
\end{aligned} \tag{11.2.7}$$

Подобно тому как бесконечный набор моментных функций случайного процесса при определенных условиях описывает его исчер-

пывающим образом, так и бесконечный набор моментных функций (11.2.7) может исчерпывающим образом описывать линейную систему (точнее говоря, переходную функцию системы).

Нетрудно убедиться в том, что моментные функции (11.2.7) обладают всеми свойствами моментных (и кумулянтных) функций стационарного случайного процесса. Мы уже указывали, что моментная функция второго порядка $a_2^\Phi(\tau) \equiv \Psi_\Phi(\tau)$ обладает всеми свойствами ковариационной функции. Также легко проверить, что, например, [ср. с (7.2.2)]

$$a_3^\Phi(\tau_2, \tau_3) = a_3^\Phi(-\tau_2, \tau_3 - \tau_2) = a_3^\Phi(\tau_2 - \tau_3, -\tau_3)$$

и, следовательно, [ср. с (7.2.3)]

$$a_3^\Phi(-\tau_2, \tau_3) = a_3^\Phi(\tau_2, \tau_3 + \tau_2) = a_3^\Phi(-\tau_2 - \tau_3, -\tau_3).$$

Для моментной функции порядка s также справедливы соотношения, подобные (7.2.6) со всеми вытекающими из них последствиями.

6. Сопряженная Фурье моментной функции второго порядка, умноженная на 2π , согласно (11.2.3), (11.2.4), равна частотной характеристике линейной системы. Это обстоятельство позволяет ввести для линейной системы бесконечный набор частотных характеристик:

$$\begin{aligned} K_2^\Phi(\omega_2) &\equiv 2\pi \hat{a}_2^\Phi(\omega_2), \\ K_3^\Phi(\omega_2, \omega_3) &\equiv (2\pi)^2 \hat{a}_3^\Phi(\omega_2, \omega_3), \\ K_4^\Phi(\omega_2, \omega_3, \omega_4) &\equiv (2\pi)^3 \hat{a}_4^\Phi(\omega_2, \omega_3, \omega_4), \\ &\dots \dots \dots \\ K_s^\Phi(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) &\equiv (2\pi)^{s-1} \hat{a}_s^\Phi(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s). \end{aligned} \quad (11.2.8)$$

Поскольку моментная функция s -го порядка обладает всеми свойствами соответствующей кумулянтной функции стационарного случайного процесса, постольку частотная характеристика s -го порядка обладает всеми свойствами спектральной плотности того же порядка (см. § 8.3).

Частотная характеристика второго порядка совпадает при этом с обычной частотной характеристикой системы

$$K_2^\Phi(\omega) \equiv |K(j\omega)|^2$$

и является вещественной функцией частоты, в отличие от частотных характеристик высших порядков.

При определенных условиях бесконечный набор частотных характеристик системы

$$K_2^\Phi(\omega_2), K_3^\Phi(\omega_2, \omega_3), \dots, K_s^\Phi(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$$

вместе с a_1^Φ также исчерпывающим образом представляет линейную систему.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КУМУЛЯНТНЫХ И МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

12.1. Преобразование кумулянтных функций

1. В предыдущей главе мы нашли общие связи выхода и входа линейного преобразования $y(t) \rightarrow x(t)$, описываемого дифференциальным уравнением

$$N(p)x(t) = M(p)y(t).$$

Пусть теперь входной сигнал $y(t)$ есть случайный процесс, исчерпывающим образом представленный набором моментных или кумулянтных функций ($s = 1, 2, 3, \dots$):

$$\alpha_s^y(t_1, t_2, \dots, t_s), \quad \kappa_s^y(t_1, t_2, \dots, t_s).$$

Поставим задачу найти моментные и кумулянтные функции выходного случайного процесса

$$\alpha_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s), \quad \kappa_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s).$$

Аналогично предыдущему эту общую задачу разобьем на две отдельных в соответствии с уравнениями

$$N(p)x(t) = z(t), \quad z(t) = M(p)y(t)$$

и будем также рассматривать моментные и кумулянтные функции промежуточной переменной $z(t)$:

$$\alpha_s^z(t_1, t_2, \dots, t_s), \quad \kappa_s^z(t_1, t_2, \dots, t_s).$$

Начнем анализ с преобразования $z(t) \rightarrow x(t)$, соответствующего линейному дифференциальному уравнению

$$N(p)x(t) = z(t).$$

Решение этого дифференциального уравнения является суммой собственного и вынужденного движений. Первое определяется начальными условиями и, если они детерминированы, само является детерминированным. Это движение мы не будем рассматривать, его учет тривиален, ибо он вносит вклад только в первую кумулянтную функцию.

Вынужденное движение, начинающееся в момент $t = 0$, согласно (11.1.8), будем рассматривать в виде (опуская индекс «вын»)

$$x(t) = \int_0^t \varphi(u) z(t-u) du. \quad (12.1.1)$$

2. Не представляет никакого труда найти моментные и кумулянтные функции интеграла (12.1.1). Образова произведения $x(t_1)x(t_2) \cdot \dots \cdot x(t_s)$, усредняя левую и правую части и принимая

во внимание коммутруемость операции усреднения и интегрирования, найдем

$$\begin{aligned}\alpha_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s) &= \\ &= \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_s} \varphi(u_1) \varphi(u_2) \cdot \dots \cdot \varphi(u_s) \alpha_s^z(t_1 - u_1, t_2 - u_2, \dots, \\ &\dots, t_s - u_s) du_1 du_2 \cdot \dots \cdot du_s.\end{aligned}\quad (12.1.2)$$

Также практически «мгновенно» можно написать и выражения для кумулянтных функций, если учесть свойства кумулянтных скобок и, в частности, их линейность по отношению к каждому аргументу:

$$\begin{aligned}\kappa_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s) &= \\ &= \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_s} \varphi(u_1) \varphi(u_2) \cdot \dots \cdot \varphi(u_s) \kappa_s^z(t_1 - u_1, t_2 - u_2, \dots, \\ &\dots, t_s - u_s) du_1 du_2 \cdot \dots \cdot du_s.\end{aligned}\quad (12.1.3)$$

3. Обсудим теперь полученные результаты. Прежде всего отметим, что связь как моментных, так и кумулянтных функций дается *линейными* интегральными соотношениями (12.1.2), (12.1.3). Это обстоятельство является, разумеется, следствием линейности системы преобразования $z(t) \rightarrow x(t)$. Далее, следует обратить внимание на то, что для нахождения s -й кумулянтной (моментной) функции процесса $x(t)$ необходимо знать именно s -ю кумулянтную (моментную) функцию переменной $z(t)$. Таким образом, линейное преобразование процессов сопровождается линейным же преобразованием соответствующих моментных и кумулянтных функций.

Другое важное следствие полученных выражений заключается в том, что связь между кумулянтными (моментными) функциями входа и выхода *инерционна*. Это происходит из-за инерционности линейной системы, соответствующей интегральному соотношению (12.1.1). Инерционность связи ведет, например, к тому, что хотя кумулянтные функции на входе и определяют кумулянтные функции на выходе, этого отнюдь не будет для кумулянтов. Действительно, чтобы получить, например, выражение для k -го кумулянта, достаточно в соответствующей кумулянтной функции приравнять аргументы. Из (12.1.3) получаем

$$\begin{aligned}\kappa_k^x(t) &= \kappa_k^x(t, t, \dots, t) = \\ &= \int_0^t \dots \int_0^t \varphi(u_1) \varphi(u_2) \cdot \dots \cdot \varphi(u_k) \kappa_k^z(t - u_1, t - u_2, \dots, \\ &\dots, t - u_k) du_1 du_2 \cdot \dots \cdot du_k.\end{aligned}\quad (12.1.4)$$

Таким образом, кумулянты выходного процесса определяются не кумулянтами, а кумулянтными функциями входного процесса. Это справедливо и для моментов. Это значит, что для получения полной информации хотя бы об одномоментном вероятностном распределении на выходе линейной инерционной системы необходимо знать, в общем случае, все многомоментные распределения на входе.

Это связано с тем, что выходная переменная инерционной системы в каждый данный момент времени является взвешенной суммой входных переменных, взятых в *различные* предшествующие моменты времени.

Если же на входе инерционной линейной системы задано лишь одномоментное распределение $W(z, t)$, то единственное, что можно узнать о выходном процессе, — это его среднее значение:

$$\kappa_1^x(t) = \langle x(t) \rangle = \int_0^t \varphi(u) \langle z(t-u) \rangle du.$$

Это обстоятельство обусловлено тем, что среднее значение случайного процесса есть его «постоянная составляющая», т. е. составляющая, которая «изменяется» столь медленно, что инерционность системы для нее не играет никакой роли.

4. Что можно сказать о преобразовании формы вероятностного распределения линейной системой? В общем случае форма распределения может измениться весьма сильно, ибо из-за действия инерционности системы зависимость κ_k^x от $t_1, t_2, \dots, t_k$ может иметь совершенно иной вид, чем зависимость κ_k^z от тех же моментов времени. Тем не менее некоторые общие закономерности существуют.

Так, например, если процесс $z(t)$ таков, что $\kappa_k^z(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_k}) \equiv 0$ для некоторого набора $k = k_1, k_2, k_3, \dots$, то аналогичными свойствами будет обладать и $x(t)$, для которого также $\kappa_k^x(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_k}) \equiv 0$ для тех же значений k . Следовательно, если статистические связи некоторых порядков во входном процессе отсутствуют, то линейная система не создаст этих связей и для выходного процесса.

Таким образом, можно говорить о *кумулянтной инвариантности* (см. § 4.2) и для инерционного линейного преобразования случайного процесса, понимая под этим сохранение числа тождественно равных нулю кумулянтных функций.

В этой связи становится совершенно очевидной инвариантность модельных распределений случайных процессов (в том числе, разумеется, и гауссова) к инерционным линейным преобразованиям.

В то же время при линейном инерционном преобразовании кумулянтные функции претерпевают определенные изменения. Это позволяет поставить вопросы: что происходит с негауссовым распределением случайного процесса при его прохождении через линейные системы? Приближается ли, например, выходное распределение к гауссову по сравнению с входным или отдаляется от него? Подробному рассмотрению этих вопросов посвящены § 12.6—12.8.

5. Переменный верхний предел интеграла (12.1.1) отражает переходные процессы, совершающиеся в системе. Если эти переходные процессы учитывать, то вероятностное распределение на выходе линейной системы будет заведомо нестационарным, даже при стационарном входе. Так, если $z(t)$ является сильно стационар-

ным процессом, для которого $\kappa_s^z(t_1, t_2, \dots, t_s) = \kappa_s^z(0, t_2 - t_1, \dots, t_s - t_1)$, то, согласно (12.1.3), кумулянтные функции

$$\begin{aligned} \kappa_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s) = & \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_s} \varphi(u_1) \varphi(u_2) \cdot \dots \cdot \varphi(u_s) \times \\ & \times \kappa_s^z(0, t_2 - t_1 - u_2 + u_1, t_3 - t_1 - u_3 + u_1, \dots \\ & \dots, t_s - t_1 - u_s + u_1) du_1 du_2 \cdot \dots \cdot du_s \end{aligned} \quad (12.1.5)$$

зависят не только от разностей $t_k - t_1$, но и непосредственно от $t_1, t_2, \dots, t_s$.

Если же рассматриваемая линейная система является устойчивой, то при $t - t_0 \gg \tau_\varphi$ переходные процессы закончатся, и выходной случайный процесс при таких t , равный

$$x(t) = \int_0^\infty \varphi(u) z(t - u) du, \quad (12.1.6)$$

становится независимым от переходных процессов, как и его вероятностное распределение.

Если при этом входной процесс сильно стационарен, то случайный процесс на выходе также будет сильно стационарным. В этом случае

$$\begin{aligned} \kappa_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(u_1) \varphi(u_2) \cdot \dots \cdot \varphi(u_s) \times \\ & \times \kappa_s^z(0, \tau_2 - u_2 + u_1, \tau_3 - u_3 + u_1, \dots, \tau_s - u_s + u_1) du_1 du_2 \dots \\ & \dots \cdot du_s. \end{aligned} \quad (12.1.7)$$

Очевидно, что то же самое соотношение имеет место и для моментных функций выходной переменной:

$$\begin{aligned} \alpha_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(u_1) \varphi(u_2) \cdot \dots \cdot \varphi(u_s) \times \\ & \times \alpha_s^z(0, \tau_2 - u_2 + u_1, \tau_3 - u_3 + u_1, \dots \\ & \dots, \tau_s - u_s + u_1) du_1 du_2 \cdot \dots \cdot du_s. \end{aligned} \quad (12.1.8)$$

Если же входной процесс является лишь слабо стационарным, то слабо стационарным будет и выходной случайный процесс.

6. Последние две формулы, описывающие преобразование моментных и кумулянтных функций сильно стационарного случайного процесса, могут быть записаны весьма компактно, если воспользоваться моментными функциями линейной системы (см. § 11.2)

$$\begin{aligned} a_s^\varphi(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) \equiv & \int_{-\infty}^\infty \varphi(t) \varphi(t + \tau_2) \varphi(t + \tau_3) \cdot \dots \\ & \dots \cdot \varphi(t + \tau_s) dt. \end{aligned} \quad (12.1.9)$$

А именно, нетрудно доказать, что формулы (12.1.7) и (12.1.8) примут теперь вид

$$\begin{aligned}\kappa_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= a_s^{\eta}(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) \otimes \kappa_s^z(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s), \\ \alpha_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= a_s^{\eta}(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) \otimes \alpha_s^z(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s).\end{aligned}\quad (12.1.10)$$

Здесь использована многомерная свертка, означающая

$$\begin{aligned}x(u_1, u_2, \dots, u_n) \otimes y(u_1, u_2, \dots, u_n) &\equiv \\ \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x(v_1, v_2, \dots, v_n) y(u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n) dv_1 dv_2 \cdot \\ \cdot \dots \cdot dv_n.\end{aligned}$$

12.2. Преобразование кумулянтных функций дифференцирующей системой

1. Обратимся теперь к уравнению

$$z(t) = M(p)y(t) \equiv M\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) \quad (12.2.1)$$

и будем считать известными моментные и кумулянтные функции

$$\alpha_s^y(t_1, t_2, \dots, t_s), \quad \kappa_s^y(t_1, t_2, \dots, t_s).$$

Требуется определить моментные и кумулянтные функции выходной переменной $z(t)$.

Так как правая часть (12.2.1) представляет собой суперпозицию производных, то для решения поставленной задачи можно привлечь формулы для моментных и кумулянтных функций производных, полученные в § 9.2. Мы, однако, поступим гораздо проще, воспользовавшись для нахождения моментных функций перестановочностью операций $\langle \dots \rangle$ и $\partial/\partial t$, а затем заменим моментные скобки на кумулянтные.

Итак,

$$\begin{aligned}\langle z(t_1) z(t_2) \dots z(t_s) \rangle &= \left\langle M\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right) M\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right) \cdot \dots \right. \\ &\dots \cdot M\left(\frac{\partial}{\partial t_s}\right) y(t_1) y(t_2) \cdot \dots \cdot y(t_s) \rangle = M\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right) M\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right) \cdot \dots \\ &\dots \cdot M\left(\frac{\partial}{\partial t_s}\right) \langle y(t_1) y(t_2) \dots y(t_s) \rangle.\end{aligned}\quad (12.2.2)$$

Таким образом,

$$\alpha_s^z(t_1, t_2, \dots, t_s) = \prod_{i=1}^s M\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \alpha_s^y(t_1, t_2, \dots, t_s). \quad (12.2.3)$$

Заменяя моментные скобки на кумулянтные, приходим к

$$\kappa_s^z(t_1, t_2, \dots, t_s) = \prod_{i=1}^s M \frac{\partial}{\partial t_i} \kappa_s^y(t_1, t_2, \dots, t_s). \quad (12.2.4)$$

Найденные формулы (12.2.3) и (12.2.4) полностью решают поставленную задачу о нахождении моментных и кумулянтных функций выхода линейной системы с дифференциальной правой частью.

2. Из (12.2.4) также следует то, что мы получили в предыдущем параграфе: s -я кумулянтная функция на выходе определяется только s -й кумулянтной функцией входа. И это обстоятельство является следствием линейности системы, вне зависимости от конкретного вида линейного оператора $M(p)$.

Таким образом, если $y(t)$ является гауссовым, то $z(t)$ также будет гауссовым; если $y(t)$ описывается эксцессным распределением, то эксцессным же распределением будет описываться и $z(t)$, и т. п. Следовательно, и в этом случае имеет место кумулянтная инвариантность, которая представляет собой общее свойство любой линейной системы.

3. Если входной процесс $y(t)$ сильно стационарен, то таким же будет и случайный процесс $z(t)$. Его моментные и кумулянтные функции, согласно (12.2.3), (12.2.4) и с учетом (9.2.6), будут равны ($s = 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} \alpha_s^z(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= \\ &= M \left(- \sum_{k=2}^s \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right) \prod_{l=2}^s M \left(\frac{\partial}{\partial \tau_l} \right) \alpha_s^y(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s), \\ \kappa_s^z(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= \\ &= M \left(- \sum_{k=2}^s \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right) \prod_{l=2}^s M \left(\frac{\partial}{\partial \tau_l} \right) \kappa_s^y(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s), \end{aligned} \quad (12.2.5)$$

в то время как первая кумулянтная функция, равная среднему значению и не зависящая от времени, будет преобразовываться по закону квазистатического воздействия $m_z = M(0) m_y$.

Для моментной и кумулянтной функций второго порядка формулы (12.2.5) дают

$$\begin{aligned} K_z[\tau] &= M \left(- \frac{d}{d\tau} \right) M \left(\frac{d}{d\tau} \right) K_y[\tau], \\ B_z[\tau] &= M \left(- \frac{d}{d\tau} \right) M \left(\frac{d}{d\tau} \right) B_y[\tau]. \end{aligned}$$

Пример 12.2.1. Пусть сильно стационарный случайный процесс $y(t)$ связан следующим дифференциальным выражением с $z(t)$:

$$z(t) = a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt}.$$

Здесь $M\left(\frac{d}{dt}\right) = a_0 + a_1 \frac{d}{dt}$. Кумулянтные функции первых четырех порядков сильно стационарного процесса $z(t)$ равны

$$m_z = a_0 m_y,$$

$$B_z[\tau] = \left[a_0^2 - a_1^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \right] B_y[\tau],$$

$$\kappa_z^z(0, \tau_2, \tau_3) = \left[a_0^3 - a_0 a_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2 \partial \tau_3} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_3^2} \right) - \right. \\ \left. - a_1^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial \tau_2^2 \partial \tau_3} + \frac{\partial^3}{\partial \tau_2 \partial \tau_3^2} \right) \right] \kappa_y^y(0, \tau_2, \tau_3),$$

$$\kappa_z^z(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \left[a_0^4 - a_0^2 a_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2 \partial \tau_3} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_3^2} \right) - a_0 a_1^3 \times \right. \\ \times \left(\frac{\partial^3}{\partial \tau_2^2 \partial \tau_3} + \frac{\partial^3}{\partial \tau_2 \partial \tau_3^2} + \frac{\partial^3}{\partial \tau_2^2 \partial \tau_4} + 2 \frac{\partial^3}{\partial \tau_2 \partial \tau_3 \partial \tau_4} + \frac{\partial^3}{\partial \tau_2 \partial \tau_4^2} + \frac{\partial^3}{\partial \tau_3^2 \partial \tau_4} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^3}{\partial \tau_3 \partial \tau_4^2} \right) - a_1^4 \left(\frac{\partial^4}{\partial \tau_2^2 \partial \tau_3 \partial \tau_4} + \frac{\partial^4}{\partial \tau_2 \partial \tau_3^2 \partial \tau_4} + \frac{\partial^4}{\partial \tau_2 \partial \tau_3 \partial \tau_4^2} \right) \left. \right] \times \\ \times \kappa_y^y(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4).$$

12.3. Пример линейного преобразования негауссова процесса

1. В качестве примера преобразования линейной системой негауссова случайного процесса рассмотрим простейшую систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + ax = by(t), \quad (12.3.1)$$

для которого $a > 0$, $\varphi(t) = be^{-at} 1(t)$ и где $y(t)$ — входной стационарный случайный процесс с заданными кумулянтными функциями

$$m_y, B_y[\tau], \kappa_y^y(0, \tau_2, \tau_3), \dots, \kappa_y^y(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s).$$

Отыщем кумулянтные функции выходного негауссова случайного процесса и с их помощью проанализируем особенности его вероятностного распределения.

Заметим, что с уравнением (12.3.1) мы уже встречались ранее. В том случае, когда $y(t)$ — гауссов белый шум, случайный процесс $x(t)$ является непрерывным марковским процессом (см. § 10.6). Уравнение (12.3.1) описывает, в частности, случайное напряжение на конденсаторе RC-цепочки (см. рис. 11.2), на входе которой действует произвольное напряжение $y(t)$ (при этом $a = b = 1/RC$).

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$, $x(0) = x_0$. Тогда общее решение уравнения (12.3.1) согласно (11.1.14) имеет вид ($t \geq 0$)

$$x(t) = x_0 e^{-at} + b \int_0^t e^{-au} y(t-u) du. \quad (12.3.2)$$

Усредняя (12.3.2), найдем

$$m_x(t) = x_0 e^{-at} + \frac{b}{a} m_y [1 - e^{-at}].$$

Случайный процесс $x(t)$ является нестационарным процессом, поскольку его среднее зависит от времени. Эта зависимость от времени обязана не только ненулевому начальному значению, но и самому процессу установления среднего значения, что означает существование флуктуационных переходных процессов.

Установившееся среднее значение, равное $\langle x(t) \rangle_{t=\infty} \equiv \equiv x_\infty = \langle y \rangle b/a$, «достигается» при временах $t \gg 1/a$. Лишь в том случае среднее значение не будет зависеть от времени, когда начальное значение совпадает с установившимся.

2. Дисперсию случайного процесса $x(t)$ нетрудно вычислить, используя формулу (12.1.4) для $k=2$. В результате получим

$$D_x(t) = \frac{b^2}{a^2} \left[a \int_0^t [e^{-au} - e^{-2at} e^{au}] K_y[u] du - \right. \\ \left. - \langle y \rangle^2 [1 - e^{-at}]^2 \right].$$

Дисперсия также зависит от времени, изменяясь от нулевого значения при $t=0$ до установившегося значения, равного при $t \gg 1/a$:

$$D_x(\infty) = \frac{b^2}{a^2} \left[a \int_0^\infty e^{-au} K_y[u] du - \langle y \rangle^2 \right].$$

Почему $D_x(0) = 0$? Дело в том, что в принятых предположениях все реализации случайного процесса $x(t)$ начинаются из *одной* точки $x(0) = x_0$, т. е. это обстоятельство связано с начальной детерминированной привязкой. Если считать начальное значение x_0 случайной величиной, не зависимой от процесса $y(t)$, то начальное значение дисперсии $D_x(0)$ будет, естественно, совпадать с дисперсией x_0 , но в дальнейшем с ростом t опять-таки придет к $D_x(\infty)$.

3. Переходя к высшим кумулянтам, согласно (12.1.4) имеем

$$\kappa_k^x(t) = b^k \int_0^t \dots \int_0^t \exp[-a(u_1 + u_2 + \dots + u_k)] \times \\ \times \kappa_k^y(0, u_1 - u_2, u_1 - u_3, \dots, u_1 - u_k) du_1 du_2 \cdot \dots \cdot du_k. \quad (12.3.3)$$

При $t = 0$ будет $\kappa_k^x(0) = 0$ вследствие детерминированной привязки случайного процесса $x(t)$. При $t \gg 1/a$ кумулянты принимают установившиеся значения:

$$\kappa_k^x = b^k \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp[-a(u_1 + u_2 + \dots + u_k)] \times \\ \times \kappa_k^y(0, u_1 - u_2, u_1 - u_3, \dots, u_1 - u_k) du_1 du_2 \cdot \dots \cdot du_k.$$

Таким образом, одномерное распределение $W(x, t)$ изменяется от начального распределения $W(x, 0) = \delta(x - x_0)$ до установившегося, стационарного распределения $W(x, \infty) = W_{\text{ст}}(x)$, определяемого набором кумулянтов κ_k^x . При этом из (12.3.3) видно, что чем выше порядок кумулянта, тем он быстрее устанавливается. Среднее значение устанавливается медленнее всего. Поэтому эволюция $W(x, t)$ носит следующий характер: сначала как бы формируется сам «вид» вероятностного распределения, затем устанавливается его «ширина» и, наконец, центр тяжести вероятностного распределения «перемещается» к установившемуся среднему значению, равному $ba^{-1} \langle y \rangle$.

4. Ту же картину мы будем наблюдать и для многомерного вероятностного распределения $W_x(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N)$, определяемого кумулянтными функциями [см. (12.1.5)]

$$\kappa_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s) = b^s \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_s} \exp[-a(u_1 + u_2 + \dots + u_s)] \times \\ \times \kappa_s^y(0, t_2 - t_1 + u_1 - u_2, t_3 - t_1 + u_1 - u_3, \dots \\ \dots, t_s - t_1 + u_1 - u_s) du_1 du_2 \cdot \dots \cdot du_s.$$

При $t_1 = t_2 = \dots = t_N = 0$ все кумулянтные функции, кроме $\kappa_1^x(0) = x_0$, равны нулю, поэтому начальное распределение есть

$$W_x(x_1, 0; x_2, 0; \dots; x_N, 0) = \prod_{i=1}^N \delta(x_i - x_0).$$

При $t_i \gg 1/a$ случайный процесс $x(t)$ становится практически стационарным, обладающим кумулянтными функциями

$$\kappa_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = b^s \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp[-a(u_1 + u_2 + \dots + u_s)] \times \\ \times \kappa_s^y(0, \tau_2 + u_1 - u_2, \tau_3 + u_1 - u_3, \dots \\ \dots, \tau_s + u_1 - u_s) du_1 du_2 \cdot \dots \cdot du_s.$$

Сказать что-либо большее о вероятностном распределении $x(t)$ в общем случае не удастся. Совершенно ясно, что те или иные особенности вероятностного распределения $x(t)$ существенно определяются статистическими характеристиками $y(t)$. Поэтому имеет смысл рассмотреть конкретный вид негауссова процесса $y(t)$.

5. Пусть $y(t)$ является стационарным дельта-процессом с кумулянтными функциями ($s = 2, 3, \dots$)

$$\kappa_s^y(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \mathcal{D}_s \delta(\tau_2) \delta(\tau_3) \cdot \dots \cdot \delta(\tau_s). \quad (12.3.4)$$

В этом случае (12.3.3) приводит к

$$\kappa_s^x(t) = \mathcal{D}_s b^s (sa)^{-1} [1 - e^{-sat}], \quad s \geq 2.$$

Итак, действительно, чем выше порядок кумулянта, тем быстрее он устанавливается. При $at \gg 1$

$$\kappa_1^x = ba^{-1} \langle y \rangle, \quad \kappa_s^x = \mathcal{D}_s b^s (sa)^{-1}.$$

Обратим теперь внимание на то, что, с одной стороны, исследуемый процесс $x(t)$ обладает негауссовым распределением, а с другой, представляет собой интеграл (12.3.2) от совершенно случайного процесса (12.3.4). Возникает парадокс, поскольку интеграл от совершенно случайного процесса можно считать суперпозицией бесконечно большого числа статистически независимых случайных величин, а по центральной предельной теореме теории вероятностей (см. § 4.4) эта суперпозиция должна иметь гауссово распределение. Этот парадокс будет раскрыт ниже, в § 12.7.

Кумулянтные функции выходного процесса в установившемся режиме, согласно (12.1.10) и при учете того, что в операциях свертки дельта-функция играет роль единицы, равны

$$\kappa_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \mathcal{D}_s b^s a_s^\Psi(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s).$$

На основании (12.1.9) моментные функции рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{aligned} a_s^\Psi(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} 1(t) e^{-a(t+\tau_2)} 1(t+\tau_2) \times \\ &\times e^{-a(t+\tau_3)} 1(t+\tau_3) \cdot \dots \cdot e^{-a(t+\tau_s)} 1(t+\tau_s) dt = \\ &= \exp[-a(\tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_s)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sat} 1(t) 1(t+\tau_2) \times \\ &\times 1(t+\tau_3) \cdot \dots \cdot 1(t+\tau_s) dt = (sa)^{-1} \exp\{-a[s \max\{0, -\tau_2, \\ &-\tau_3, \dots, -\tau_s\} + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_s]\}. \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$[s \max\{0, -\tau_2, -\tau_3, \dots, -\tau_s\} + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_s] \equiv g_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s), \quad (12.3.5)$$

получим кумулянтные функции рассматриваемого негауссова случайного стационарного процесса $x(t)$:

$$\kappa_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \mathcal{D}_s b^s s^{-1} a^{-1} \exp[-ag_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)]. \quad (12.3.6)$$

Функция $g_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)$ является линейной симметрической функцией аргументов τ_k . Из (12.3.5) нетрудно найти ее свойства:

1. $g_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) \geq 0$,
2. $g_s(0^{[s]}) = 0$,
3. $g_s(0^{[q]}, \tau^{[s-q]}) = \begin{cases} (s-q)\tau, & \tau > 0 \\ -q\tau, & \tau < 0 \end{cases}$,
4. $g_{2k}(0^{[k]}, \tau^{[k]}) = k |\tau|$.

Таким образом, в общем случае кумулянтные функции $\kappa_s^x(0^{[q]}, \tau^{[s-q]})$ являются несимметричными функциями τ . В то же время $\kappa_{2k}^x(0^{[k]}, \tau^{[k]})$, как и должно быть согласно (7.2.8), являются четными:

$$\begin{aligned} \kappa_2^x(0, \tau) &= \mathcal{D}_2 b^2 (2a)^{-1} e^{-a|\tau|}, \\ \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) &= \mathcal{D}_4 b^4 (4a)^{-1} e^{-2a|\tau|}, \\ &\dots \\ \kappa_{2k}^x(0^{[k]}, \tau^{[k]}) &= \mathcal{D}_{2k} b^{2k} (2ka)^{-1} e^{-ka|\tau|}. \end{aligned} \quad (12.3.7)$$

Можно обнаружить и четные комбинации $g_s(0^{[q]}, \tau^{[s-q]})$:

$$\begin{aligned} g_3(0, 0, \tau) + g_3(0, \tau, \tau) &= 3|\tau|, \\ g_4(0, 0, 0, \tau) + g_4(0, 0, \tau, \tau) + g_4(0, \tau, \tau, \tau) &= 6|\tau|, \\ g_5(0^{[4]}, \tau) + g_5(0^{[3]}, \tau^{[2]}) + g_5(0^{[2]}, \tau^{[3]}) + g_5(0, \tau^{[4]}) &= \\ = 10|\tau|, \\ &\dots \\ g_s(0^{[s-1]}, \tau) + g_s(0^{[s-2]}, \tau^{[2]}) + \dots + g_s(0, \tau^{[s-1]}) &= \\ = \frac{s(s-1)}{2} |\tau|. \end{aligned}$$

Поэтому, как и должно быть в соответствии с (7.2.9), следующие комбинации кумулянтных функций рассматриваемого случайного процесса являются четными:

$$\begin{aligned} \kappa_3^x(0, 0, \tau) + \kappa_3^x(0, \tau, \tau) &= \frac{\mathcal{D}_3 b^3}{3a} [e^{-a|\tau|} + e^{-2a|\tau|}], \\ \kappa_5^x(0, 0, 0, 0, \tau) + \kappa_5^x(0, 0, 0, \tau, \tau) + \kappa_5^x(0, 0, \tau, \tau, \tau) + \\ + \kappa_5^x(0, \tau, \tau, \tau, \tau) &= \frac{\mathcal{D}_5 b^5}{5a} [e^{-a|\tau|} + e^{-2a|\tau|} + e^{-3a|\tau|} + \\ + e^{-4a|\tau|}] \end{aligned} \quad (12.3.8)$$

и вообще

$$\sum_{q=1}^{s-1} \kappa_s^x(0^{[q]}, \tau^{[s-q]}) = \frac{\mathcal{D}_s b^s}{sa} \sum_{q=1}^{s-1} e^{-qa|\tau|}.$$

12.4. Дифференциальные уравнения моментных и кумулянтных функций

1. В ряде случаев бывает полезным составление дифференциальных уравнений для моментных и кумулянтных функций, исходя из заданных дифференциальных уравнений для самих случайных процессов. Эту операцию нетрудно провести, если воспользоваться результатами § 12.2.

Рассмотрим общее линейное преобразование $y \rightarrow z \rightarrow x$:

$$N(p)x(t) = z(t), \quad z(t) = M(p)y(t). \quad (12.4.1)$$

С помощью (12.2.3) можем записать следующее уравнение, связывающее моментные функции z с моментными функциями y :

$$\alpha_s(t_1, t_2, \dots, t_s) = \prod_{i=1}^s M\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \alpha_s^y(t_1, t_2, \dots, t_s). \quad (12.4.2)$$

Если теперь первое уравнение (12.4.1) понимать таким образом, что $x(t)$ есть заданный случайный процесс, а $z(t)$ — искомый, то на основании той же формулы (12.2.3)

$$\prod_{i=1}^s N\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \alpha_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s) = \alpha_s^z(t_1, t_2, \dots, t_s). \quad (12.4.3)$$

Теперь осталось лишь объединить (12.4.2) и (12.4.3), и мы получим искомое дифференциальное уравнение для моментных функций

$$\prod_{i=1}^s N\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \alpha_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s) = \prod_{j=1}^s M\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) \alpha_s^y(t_1, t_2, \dots, t_s), \quad (12.4.4)$$

соответствующее исходному дифференциальному уравнению

$$N(p)x(t) = M(p)y(t).$$

На основании (12.2.4) аналогичному уравнению будут подчиняться и кумулянтные функции:

$$\prod_{i=1}^s N\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \kappa_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s) = \prod_{j=1}^s M\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) \kappa_s^y(t_1, t_2, \dots, t_s). \quad (12.4.5)$$

Для среднего значения $m_x(t)$ и ковариационной функции $B_x(t_1, t_2)$ получим, в частности, уравнения

$$\begin{aligned} N\left(\frac{d}{dt}\right) m_x(t) &= M\left(\frac{d}{dt}\right) m_y(t), \\ N\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right) N\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right) B_x(t_1, t_2) &= M\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right) M\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right) B_y(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Пример 12.4.1. Пусть, например, (см. § 12.3) связь $x(t)$ с $y(t)$ дается уравнением

$$\frac{dx}{dt} + ax = by.$$

Тогда первые три кумулянтные функции $x(t)$ описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dm_x(t)}{dt} + am_x(t) &= bm_y(t), \\ \frac{\partial^2 B_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + a \frac{\partial B_x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + a \frac{\partial B_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + a^2 B_x(t_1, t_2) &= \\ = b^2 B_y(t_1, t_2), \\ \frac{\partial^3 \kappa_3^x(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3} + a \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} + \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} \right] \kappa_3^x(t_1, t_2, t_3) + \\ + a^2 \left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial t_3} \right] \kappa_3^x(t_1, t_2, t_3) + a^3 \kappa_3^x(t_1, t_2, t_3) &= \\ = b^3 \kappa_3^y(t_1, t_2, t_3). \end{aligned}$$

2. Если входной случайный процесс $x(t)$ является стационарным, то $y(t)$ станет стационарным процессом лишь после того, как затухнут переходные процессы в системе, описываемой уравнением $N(p)x(t) = 0$. По прошествии этого времени моментные и кумулянтные функции обоих процессов будут связаны на основании (12.2.5) следующим уравнением:

$$\begin{aligned} N \left(- \sum_{k=2}^s \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right) \prod_{i=2}^s N \left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} \right) \rho_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \\ = M \left(- \sum_{i=2}^s \frac{\partial}{\partial \tau_i} \right) \prod_{j=2}^s M \left(\frac{\partial}{\partial \tau_j} \right) \rho_s^y(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s). \end{aligned} \quad (12.4.6)$$

Как и ранее, ρ_s обозначает здесь как моментную, так и кумулянтную функцию.

Так, например, ковариационная функция стационарного процесса $x(t)$ определяется уравнением

$$N \left(- \frac{d}{d\tau} \right) N \left(\frac{d}{d\tau} \right) B_x[\tau] = M \left(- \frac{d}{d\tau} \right) M \left(\frac{d}{d\tau} \right) B_y[\tau], \quad (12.4.7)$$

где $B_y[\tau]$ считается заданной.

Пример 12.4.2. Если обратиться к примеру 12.4.1, то на основании (12.4.6) нетрудно записать следующие дифференциальные уравнения, связывающие первые три кумулянтные функции стационарных процессов $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{aligned} m_x &= ba^{-1} m_y, \\ - \frac{d^2 B_x[\tau]}{d\tau^2} + a^2 B_x[\tau] &= b^2 B_y[\tau], \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial^3 \kappa_3^x(0, \tau_2, \tau_3)}{\partial \tau_2^2 \partial \tau_3} - \frac{\partial^3 \kappa_3^x(0, \tau_2, \tau_3)}{\partial \tau_2 \partial \tau_3^2} - a \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2 \partial \tau_3} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_3^2} \right] \kappa_3^x(0, \tau_2, \tau_3) + a^3 \kappa_3^x(0, \tau_2, \tau_3) = b^3 \kappa_3^y(0, \tau_2, \tau_3). \quad (12.4.8)$$

3. Если внимательно рассмотреть путь, которым мы пришли к уравнениям (12.4.4), (12.4.5) или (12.4.6), то легко увидеть, что главное, чем мы воспользовались, — это перестановочность моментных и кумулянтных скобок с оператором дифференцирования. Это обстоятельство дает нам возможность подойти к проблеме составления дифференциальных уравнений для моментных и кумулянтных функций по-другому, путем непосредственного написания этих уравнений, исходя из конкретных уравнений, связывающих случайные переменные. Этот путь открывает простые возможности составления уравнений и для *совместных* моментных и кумулянтных функций, связывающих статистические характеристики входа и выхода.

Мы проиллюстрируем этот подход на примере уже рассмотренного простейшего уравнения

$$dx/dt + ax = by,$$

предполагая процесс $y(t)$ стационарным и рассматривая установившееся движение $x(t)$.

Начнем с получения уравнения для $\langle x, x_\tau \rangle$. Запишем исходное уравнение для момента времени $t + \tau$

$$\frac{dx_\tau}{d\tau} + ax_\tau = by_\tau.$$

Внесем теперь обе части этого уравнения в кумулянтную скобку второго порядка и воспользуемся первыми тремя свойствами кумулянтных скобок:

$$\left\langle x, \frac{dx_\tau}{d\tau} + ax_\tau \right\rangle = \langle x, by_\tau \rangle,$$

$$\left\langle x, \frac{dx_\tau}{d\tau} \right\rangle + a \langle x, x_\tau \rangle = b \langle x, y_\tau \rangle.$$

Вынося оператор $d/d\tau$ за скобку, окончательно приходим к уравнению

$$\frac{d}{d\tau} \langle x, x_\tau \rangle + a \langle x, x_\tau \rangle = b \langle x, y_\tau \rangle, \quad (12.4.9)$$

являющемуся еще одним уравнением для ковариационной функции [ср. со вторым уравнением (12.4.8)]. В правую часть этого уравнения входит неизвестная совместная ковариационная функция второго порядка. Для нее совершенно таким же путем мы найдем свое дифференциальное уравнение, приняв во внимание, что согласно

(7.5.2) $\langle x, y_{\tau} \rangle = \langle y, x_{-\tau} \rangle$, и записав исходное уравнение для момента времени $t - \tau$:

$$-\frac{dx_{-\tau}}{d\tau} + ax_{-\tau} = by_{-\tau}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \left\langle y, -\frac{dx_{-\tau}}{d\tau} + ax_{-\tau} \right\rangle &= \langle y, by_{-\tau} \rangle, \\ -\frac{d}{d\tau} \langle y, x_{-\tau} \rangle + a \langle y, x_{-\tau} \rangle &= b \langle y, y_{-\tau} \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая четность автоковариационной функции и вынося оператор дифференцирования за скобку, найдем

$$-\frac{d}{d\tau} \langle x, y_{\tau} \rangle + a \langle x, y_{\tau} \rangle = b \langle y, y_{\tau} \rangle. \quad (12.4.10)$$

Таково уравнение для совместной ковариационной функции. В его правую часть входит теперь заданная ковариационная функция входного процесса.

Решая (12.4.10) и задаваясь начальными условиями, можно без труда отыскать $\langle x, y_{\tau} \rangle \equiv B_{xy}[\tau]$. С другой стороны, исключая эту функцию из (12.4.9), (12.4.10), мы, как и должно быть, придем ко второму уравнению (12.4.8).

Отыскание уравнения для третьей кумулянтной функции $\langle x, x_{\tau_2}, x_{\tau_3} \rangle$ приведет нас к

$$\left\langle x, \frac{dx_{\tau_2}}{d\tau_2} + ax_{\tau_2}, \frac{dx_{\tau_3}}{d\tau_3} + ax_{\tau_3} \right\rangle = \langle x, by_{\tau_2}, by_{\tau_3} \rangle.$$

Раскрывая кумулянтные скобки, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau_2 \partial \tau_3} \langle x, x_{\tau_2}, x_{\tau_3} \rangle + a \frac{\partial}{\partial \tau_2} \langle x, x_{\tau_2}, x_{\tau_3} \rangle + \\ + a \frac{\partial}{\partial \tau_3} \langle x, x_{\tau_2}, x_{\tau_3} \rangle + \\ + a^2 \langle x, x_{\tau_2}, x_{\tau_3} \rangle = b^2 \langle x, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \tau_2} \langle x, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle + a \langle x, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle = b \langle y, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle, \\ -\frac{\partial}{\partial \tau_3} \langle x, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle + a \langle x, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle = b \langle y, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle. \end{aligned}$$

Итак, мы обнаружили другой вид уравнений для третьих кумулянтных функций. Объединяя три последние уравнения и исключая из них $\langle x, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle$, мы, разумеется, придем к третьему уравнению (12.4.8).

12.5. Суперпозиция негауссовых процессов

1. Суперпозиция (взвешенная сумма) случайных процессов является простейшей линейной операцией над процессами. Определим кумулянтные функции этой суммы. Начнем рассмотрение с суперпозиции двух случайных процессов

$$z(t) = ax(t) + by(t),$$

предполагая заданными кумулянтные функции их стационарной совокупности $\{x(t), y(t)\}$:

$$\begin{aligned} \kappa_{p,q}^{x,y}(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p; \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q) = \\ = \kappa_{q,p}^{y,x}(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q; 0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_p). \end{aligned}$$

На основании свойств кумулянтных скобок имеем

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \langle ax + by \rangle = a \langle x \rangle + b \langle y \rangle, \\ \langle z, z_\tau \rangle &= \langle ax + by, ax_\tau + by_\tau \rangle = a^2 \langle x, x_\tau \rangle + \\ &+ ab \langle x, y_\tau \rangle + ab \langle y, x_\tau \rangle + b^2 \langle y, y_\tau \rangle, \\ \langle z, z_{\tau_2}, z_{\tau_3} \rangle &= \langle ax + by, ax_{\tau_2} + by_{\tau_2}, ax_{\tau_3} + by_{\tau_3} \rangle = \\ &= a^3 \langle x, x_{\tau_2}, x_{\tau_3} \rangle + ab^2 \langle x, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle + \\ &+ ab^2 \langle y, x_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle + ab^2 \langle y, y_{\tau_2}, x_{\tau_3} \rangle + \\ &+ a^2b \langle x, x_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle + a^2b \langle x, y_{\tau_2}, x_{\tau_3} \rangle + \\ &+ a^2b \langle y, x_{\tau_2}, x_{\tau_3} \rangle + b^3 \langle y, y_{\tau_2}, y_{\tau_3} \rangle \text{ и т. д. } \quad (12.5.1) \end{aligned}$$

Если ввести скобки симметризации и симметризацию вести по сочетаниям аргументов, например,

$$\begin{aligned} 4 \{ \kappa_{1,3}^{x,y}(0; \tau_2, \tau_3, \tau_4) \}_s &\equiv \kappa_{1,3}^{x,y}(0; \tau_2, \tau_3, \tau_4) + \kappa_{1,3}^{x,y}(\tau_2; \\ 0, \tau_3, \tau_4) &+ \kappa_{1,3}^{x,y}(\tau_3; 0, \tau_2, \tau_4) + \kappa_{1,3}^{x,y}(\tau_4; 0, \tau_2, \tau_3), \end{aligned}$$

то из (12.5.1) получим следующие формулы для первых четырех кумулянтных функций суперпозиции:

$$\begin{aligned} \kappa_1^z &= a\kappa_1^x + b\kappa_1^y, \\ \kappa_2^z(0, \tau) &= a^2\kappa_2^x(0, \tau) + ab \cdot 2 \{ \kappa_{1,1}^{x,y}(0; \tau) \}_s + b^2\kappa_2^y(0, \tau), \\ \kappa_3^z(0, \tau_2, \tau_3) &= a^3\kappa_3^x(0, \tau_2, \tau_3) + a^2b \cdot 3 \{ \kappa_{2,1}^{x,y}(0, \tau_2; \\ \tau_3) \}_s &+ ab^2 \cdot 3 \{ \kappa_{1,2}^{x,y}(0; \tau_2, \tau_3) \}_s + b^3\kappa_3^y(0, \tau_2, \tau_3), \\ \kappa_4^z(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &= a^4\kappa_4^x(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4) + \\ &+ a^3b \cdot 4 \{ \kappa_{3,1}^{x,y}(0, \tau_2, \tau_3; \tau_4) \}_s + a^2b^2 \cdot 6 \{ \kappa_{2,2}^{x,y}(0, \tau_2; \\ \tau_3, \tau_4) \}_s &+ ab^3 \cdot 4 \{ \kappa_{1,3}^{x,y}(0; \tau_2, \tau_3, \tau_4) \}_s + b^4\kappa_4^y(0, \tau_2, \\ \tau_3, \tau_4). \end{aligned} \quad (12.5.2)$$

Кумулянтная функция произвольного порядка примет вид

$$\begin{aligned} \kappa_s^{ax+by}(0, \tau_2, \dots, \tau_s) = \\ = \sum_{l=0}^s a^{s-l} b^l C_s^l \{ \kappa_{(s-l), l}^{x, y}(0, \tau_2, \dots, \tau_{s-l}; \tau_{s-l+1}, \dots, \tau_s) \}_s. \end{aligned} \quad (12.5.3)$$

Поскольку $\kappa_s^z(0, \tau_2, \dots, \tau_s)$ является симметрической функцией всех аргументов, то такой же функцией должна быть и правая часть (12.5.3). Нетрудно видеть, что группировка правой части по скобкам симметризации как раз и представляет собой группировку по симметричным выражениям, ибо всякая скобка симметризации вместе с множителем, стоящим перед ней, является симметрической функцией всех входящих в нее аргументов независимо от их разделения на группы.

При $\tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau_s = 0$, когда кумулянтные функции переходят в кумулянты, формула (12.5.3) при $a = b = 1$, как и должно быть, переходит в формулу (4.3.1), дающую значение кумулянтов суммы двух случайных величин.

2. Если имеется суперпозиция многих случайных процессов

$$z(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_N x_N(t),$$

то для нахождения кумулянтных функций $z(t)$ необходимо, очевидно, задаться всеми кумулянтными функциями совокупности (здесь через τ_j^i обозначены двухиндексные переменные):

$$\begin{aligned} \kappa_{p_1, p_2, \dots, p_N}^{x_1, x_2, \dots, x_N}(0, \tau_2^1, \tau_3^1, \dots, \tau_{p_1}^1; \tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_{p_2}^2; \dots; \\ \tau_1^N, \tau_2^N, \dots, \tau_{p_N}^N) = \kappa_{p_2, p_1, \dots, p_N}^{x_2, x_1, \dots, x_N}(\tau_1^1, \tau_2^1, \dots, \tau_{p_2}^1; \\ 0, \tau_2^1, \tau_3^1, \dots, \tau_{p_1}^1; \dots; \tau_1^N, \tau_2^N, \dots, \tau_{p_N}^N) = \dots = \\ = \kappa_{p_2, \dots, p_N, p_1}^{x_2, \dots, x_N, x_1}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_{p_2}^2; \dots; \\ \tau_1^N, \tau_2^N, \dots, \tau_{p_N}^N; 0, \tau_2^1, \tau_3^1, \dots, \tau_{p_1}^1). \end{aligned}$$

Если все эти совместные кумулянтные функции заданы, то кумулянтные функции суммы равны

$$\begin{aligned} \kappa_s^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N}(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \\ = \sum_{l_1 + l_2 + \dots + l_N = s} a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_N^{l_N} \frac{s!}{l_1! l_2! \dots l_N!} \times \\ \times \{ \kappa_{l_1, l_2, \dots, l_N}^{x_1, x_2, \dots, x_N}(0, \tau_2, \dots, \tau_{l_1}; \tau_{l_1+1}, \dots, \tau_{l_1+l_2}; \dots; \\ \tau_{l_N-1+1}, \dots, \tau_s) \}_s. \end{aligned} \quad (12.5.4)$$

Каждое слагаемое этой суммы представляет собой скобку симметризации, содержащую $s!/l_1!l_2! \cdot \dots \cdot l_N!$ членов и являющуюся симметрической функцией всех входящих в нее аргументов.

При $\tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau_s = 0$ и $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 1$ формула (12.5.4) переходит в (4.3.2).

В случае, когда суммируются статистически независимые случайные процессы, для которых все совместные кумулянтные функции тождественно равны нулю, из (12.5.4) следует, что

$$\begin{aligned} \kappa_s^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N} (0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \\ = \sum_{k=1}^N a_k^s \kappa_s^{x_k} (0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s). \end{aligned}$$

Таким образом, кумулянтные функции суммы статистически независимых процессов равны сумме кумулянтных функций самих процессов [ср. с (4.3.3)].

12.6. Преобразование пуассоновского процесса

1. Хотя задача о преобразовании вероятностных распределений линейными инерционными системами в принципе и решена с помощью соотношений (12.1.3) или (12.1.7), дающих преобразование кумулянтных функций, тем не менее, не конкретизируя входное распределение, мало что можно практически извлечь из этих соотношений в общем случае. Это относится и к поставленному в § 12.1 вопросу о том, насколько линейная система нормализует или денормализует вероятностные распределения.

Чтобы как-то продвинуться на пути решения этого интересного и практически важного вопроса, целесообразно ограничиться каким-либо конкретным входным случайным процессом, таким, который позволит вышеупомянутые формулы свести к ясным и четким взаимоотношениям между кумулянтами. В качестве такого конкретного входного процесса мы возьмем пуассоновский случайный процесс (см. § 7.4). Задача о прохождении пуассоновского процесса через линейные системы описывает весьма распространенную реальную ситуацию прохождения шумов через различные усилители, фильтры и т. п.

2. Итак, пусть $y(t)$ представляет собой стационарный пуассоновский процесс:

$$y(t) = \sum_i a_i F(t - t_i), \quad (12.6.1)$$

являющийся случайной суперпозицией элементарных импульсов $F(t)$.

Кумулянтные функции этого пуассоновского процесса, согласно (7.4.8), равны

$$\begin{aligned} \kappa_s^y(0, \tau_2, \dots, \tau_s) = \\ = n_0 \langle a^s \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F(u + \tau_2) \cdot \dots \cdot F(u + \tau_s) du. \end{aligned} \quad (12.6.2)$$

Отыщем кумулянтные функции выходного процесса $x(t)$, связанного с $y(t)$ соотношением (12.1.6):

$$x(t) = \int_0^{\infty} \varphi(u) y(t-u) du.$$

Подставляя (12.6.1) в этот интеграл и вводя обозначение

$$\int_0^{\infty} \varphi(u) F(t-u) du \equiv \mathcal{G}(t), \quad (12.6.3)$$

получим кумулянтные функции выходного также стационарного процесса $x(t)$:

$$\begin{aligned} \kappa_s^x(0, \tau_2, \dots, \tau_s) = \\ = n_0 \langle a^s \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(u) \mathcal{G}(u + \tau_2) \cdot \dots \cdot \mathcal{G}(u + \tau_s) du. \end{aligned} \quad (12.6.4)$$

Сравнивая (12.6.4) с (12.6.2), видим полное совпадение структур этих кумулянтных функций с той лишь разницей, что вместо $F(t)$ стоит $\mathcal{G}(t)$. Эта замена имеет чрезвычайно простое и ясное объяснение. А именно, поскольку система линейна и поскольку ее вход (12.6.1) представляет собой суперпозицию случайно возникающих импульсов, то очевидно, что на выходе этой системы мы также будем иметь суперпозицию случайно возникающих импульсов с тем же законом появления импульсов во времени, которые, однако, имеют уже другую форму. Эта новая форма импульсов есть не что иное, как реакция линейной системы на элементарный импульс входа, и именно поэтому выходной импульс описывается формулой (12.6.3). Следовательно, на выходе рассматриваемой системы мы получаем также пуассоновский процесс

$$x(t) = \sum_i a_i \mathcal{G}(t - t_i), \quad (12.6.5)$$

кумулянтные функции которого равны (12.6.4).

Таким образом, задавая форму входного элементарного импульса $F(t)$ и переходную функцию линейной системы $\varphi(t)$, мы можем получить исчерпывающую информацию о входном и выходном распределениях.

Полагая $\tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau_s = 0$, из (12.6.2) и (12.6.4) получаем следующие выражения для кумулянтов:

$$\kappa_s^y = n_0 \langle a^s \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F^s(u) du, \quad \kappa_s^x = n_0 \langle a^s \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}^s(u) du. \quad (12.6.6)$$

Введем обозначения

$$F(t) = F_0 f(t), \quad \mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_0 g(t), \quad F_0 = \max F(t), \\ \mathcal{G}_0 = \max \mathcal{G}(t)$$

и запишем характерные времена

$$T_s^y = \frac{1}{F_0^s} \int_{-\infty}^{\infty} F^s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^s(t) dt, \\ T_s^x = \frac{1}{\mathcal{G}_0^s} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}^s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g^s(t) dt. \quad (12.6.7)$$

Тогда кумулянты (12.6.6) могут быть записаны в виде

$$\kappa_s^y = n_0 \langle a^s \rangle F_0^s T_s^y, \quad \kappa_s^x = n_0 \langle a^s \rangle \mathcal{G}_0^s T_s^x. \quad (12.6.8)$$

Чтобы можно было сравнивать между собой входное и выходное распределения, примем для простоты, что $\langle a \rangle = 0$, и рассмотрим кумулянтные коэффициенты

$$\gamma_s^y = \frac{\langle a^s \rangle}{\langle a^2 \rangle^{s/2}} \frac{T_s^y n_0}{(\bar{T}_2^y n_0)^{s/2}}, \\ \gamma_s^x = \frac{\langle a^s \rangle}{\langle a^2 \rangle^{s/2}} \frac{T_s^x n_0}{(T_2^x n_0)^{s/2}}. \quad (12.6.9)$$

3. Для выяснения характера изменения кумулянтных коэффициентов пуассоновского процесса при прохождении его через инерционную линейную систему, составим отношение одних и тех же кумулянт на выходе и входе системы:

$$(\gamma_s)_{\text{вых}} = (\gamma_s)_{\text{вх}} \frac{T_{s \text{ вых}} / T_2^{s/2} \text{ вых}}{T_{s \text{ вх}} / T_2^{s/2} \text{ вх}}. \quad (12.6.10)$$

Здесь случайному процессу $x(t)$ приписан индекс «вых», а процессу $y(t)$ — индекс «вх».

Рассмотрим подробнее характерные времена (12.6.7), которые по существу представляют собой различные длительности элементарного импульса. Для всех форм импульсов, отличающихся от прямоугольных, все T_s , конечно, различны. Особенно могут сильно отличаться между собой длительности для четных и нечетных s . С другой стороны, все T_{2s} отличаются друг от друга не столь существенно, и если интересоваться лишь порядком их величины, то можно полагать $T_{2s} \approx T_2$.

Кроме того, следует заметить, что поскольку $\max f(t)$ и $\max g(t)$ равны единице, постольку всегда будет справедливым неравенство $T_{2(s+1)} \leq T_{2s}$. Поэтому, полагая $T_{2s} \approx T_2$, мы берем верхние границы «четных» длительностей. Аналогичная ситуация

имеет место и для «нечетных» длительностей. В общем случае $T_{2(s+1)+1} \leq T_{2s+1}$. Полагая $T_{2s+1} \approx T_1$, мы опять возьмем верхнюю границу и правильно оценим порядок нечетных длительностей.

В соответствии с этим точные выражения (12.6.10) мы можем заменить следующими приближенными:

$$\gamma_{2s \text{ Вых}} = \gamma_{2s \text{ Вх}} \left[\frac{T_{2 \text{ Вх}}}{T_{2 \text{ Вых}}} \right]^{s-1},$$

$$\gamma_{2s-1 \text{ Вых}} = \gamma_{2s-1 \text{ Вх}} \frac{T_{1 \text{ Вых}}}{T_{1 \text{ Вх}}} \left[\frac{T_{2 \text{ Вх}}}{T_{2 \text{ Вых}}} \right]^{s-1/2}. \quad (12.6.11)$$

Из этих формул с очевидностью следует, что основным фактором, влияющим на преобразование вероятностного распределения, является отношение длительностей элементарных импульсов на входе и выходе системы. В зависимости от того, укорачиваются они или удлиняются или остаются по порядку величины без изменений, будет тем или иным образом деформироваться одномоментное распределение вероятностей.

12.7. Нормализация негауссова распределения

1. Пусть имеется некоторая линейная система, описываемая переходной функцией $\varphi(t)$ и преобразующая $F(t)$ — входной элементарный импульс пуассоновского случайного процесса — в выходной импульс $\mathcal{G}(t)$. Пусть для простоты вероятностное распределение амплитуд импульсов является симметричным, так что $\langle a^{2l+1} \rangle = 0$. Тогда, в соответствии с (12.6.8), (12.6.9), все нечетные кумулянты и кумулянтные коэффициенты равны нулю. Значит, выходное вероятностное распределение также является симметричным. Будем, кроме того, писать T вместо T_2 . Деформация вероятностного распределения линейной инерционной системой определяется первым соотношением (12.6.11):

$$(\gamma_{2s})_{\text{Вых}} = (\gamma_{2s})_{\text{Вх}} [T_{\text{Вх}}/T_{\text{Вых}}]^{s-1}. \quad (12.7.1)$$

Пусть линейная система такова, что $T_{\text{Вых}} > T_{\text{Вх}}$, тогда

$$(\gamma_{2s})_{\text{Вых}} < (\gamma_{2s})_{\text{Вх}}, \quad s \geq 2.$$

В этом случае говорят, что имеет место *эффект нормализации* случайного процесса, поскольку все высшие кумулянты на выходе меньше, чем на входе.

Если же система такова, что $T_{\text{Вых}}$ достаточно велико по сравнению с $T_{\text{Вх}}$, то выходной процесс будет иметь практически гауссово распределение независимо от вероятностного распределения на входе.

2. Обсудим теперь, какими свойствами должна обладать линейная система, чтобы реализовался эффект нормализации, и какова физическая природа этого эффекта.

Что делает линейная система с длительностью элементарного импульса? Если эта система безынерционна, то T не изменится, и в этом случае $T_{\text{вых}} = T_{\text{вх}}$. Если же система инерционна, то очевидно, что T изменится. Рассмотрим характерное время системы — время релаксации (11.2.5)

$$T_{\varphi} \equiv \frac{1}{\varphi_0^2} \int_0^{\infty} \varphi^2(t) dt$$

и различные соотношения между T_{φ} и $T_{\text{вх}}$.

Пусть $T_{\varphi} \ll T_{\text{вх}}$. В этом случае

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^{\infty} \varphi(u) F(t-u) du = F(t) \int_0^{\infty} \varphi(u) du = BF(t).$$

Таким образом,

$$T_{\text{вых}} = \frac{1}{B^2 F_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} B^2 F^2(t) dt = T_{\text{вх}}.$$

Таким образом, случаю $T_{\varphi} \ll T_{\text{вх}}$ соответствует безынерционность системы преобразования.

Если имеет место обратное соотношение $T_{\varphi} \gg T_{\text{вх}}$, то

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^{\infty} \varphi(u) F(t-u) du = \varphi(t) \int_0^{\infty} F(u) du = A \varphi(t).$$

Следовательно,

$$T_{\text{вых}} = \frac{1}{A^2 \varphi_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \varphi^2(t) dt = T_{\varphi} \gg T_{\text{вх}}.$$

В этом случае мы имеем большую инерционность системы и, как следствие, сильную нормализацию случайного процесса.

Явление нормализации тесно связано с центральной предельной теоремой теории вероятностей (см. § 4.4), согласно которой распределение нормированной суммы статистически независимых «равновкладных» случайных величин стремится к гауссову при увеличении числа членов суммы, независимо от распределения каждого слагаемого.

В самом деле, случайный процесс $x(t)$ согласно (12.6.5) представляет собой в каждый данный момент времени сумму столько членов, сколько их возникает за длительность одного импульса $\mathcal{G}(t)$. Легко видеть, что среднее число таких членов равно $n_0 T_{\text{вых}}$. Входной процесс $y(t)$ также является в каждый данный момент времени суммой слагаемых. Число членов этой суммы, очевидно, равно $n_0 T_{\text{вх}}$. Тем самым если $T_{\text{вых}} > T_{\text{вх}}$, то число слагаемых «выходной суммы» больше числа слагаемых «входной суммы» и, следовательно, в согласии с центральной предельной теоремой распределение выходной суммы должно быть ближе к гауссову, чем распределение входной суммы.

Если же $T_{\text{вых}} \gg T_{\text{вх}}$ и при этом $n_0 T_{\text{вых}}$ достаточно велико, то можно считать, что условия центральной предельной теоремы выполнены, и на выходе такой линейной системы имеется практически гауссово распределение.

Таким образом, нормализация пуассоновского процесса линейной инерционной системой происходит потому, что эта система увеличивает длительность элементарного импульса.

И теперь вполне очевидным представляется следующее утверждение. Поскольку линейная инерционная система ($T_{\text{ф}} \geq T_{\text{вх}}$) всегда увеличивает длительность элементарного импульса, т. е. всегда имеет место $T_{\text{вых}} > T_{\text{вх}}$, постольку *линейная инерционная система всегда нормализует случайный пуассоновский процесс.*

Однако, как будет показано в следующем параграфе, это утверждение ложно. Как установлено Л. П. Зачепиской, могут быть случаи, когда $T_{\text{ф}} \geq T_{\text{вх}}$, а вместе с тем, никакой нормализации нет; более того, может иметь место даже денормализация, причем все это отнюдь не противоречит центральной предельной теореме теории вероятностей [52, 58, 59].

3. Эффект нормализации случайного процесса линейной инерционной системой, разумеется, не связан с природой самого случайного процесса, и для того, чтобы этот эффект показать, нет необходимости обязательно прибегать к модели пуассоновского входного процесса. Имеются и другие примеры, четко показывающие существование нормализации.

Одним из таких интересных и нетривиальных примеров является нормализация линейной инерционной системой совершенно случайного процесса. Подобная задача возникает при следующем часто встречающемся обстоятельстве. Пусть задана инерционная линейная система преобразования $\xi(t) \rightarrow y(t)$ (рассматриваем только установившийся режим):

$$y(t) = \int_0^{\infty} \varphi(u) \xi(t-u) du,$$

где $\xi(t)$ — входной совершенно случайный процесс.

Спрашивается, будет ли распределение выходного случайного процесса гауссовым на том основании, что $y(t)$ представляет собой сумму бесконечно большого числа статистически независимых слагаемых? Рассмотрение, проведенное в § 12.3, показало, что ответ на этот вопрос может быть отрицательным. Как же тогда следует понимать нормализацию, которая обязательно должна иметь место в этом случае, ибо ее условие $T_{\text{вых}} \gg T_{\text{вх}}$ заведомо выполнено ($T_{\text{вх}} = 0$, $T_{\text{вых}} = T_{\text{ф}} > 0$)? Для того, чтобы разобраться в возникшей ситуации, обратимся к двум примерам.

Пример 12.7.1. Пусть $\varphi(t) = e^{-at} 1(t)$, а совершенно случайный негауссов стационарный процесс $\xi(t)$ обладает кумулянтными функциями (7.4.5):

$$\kappa_2^{\xi}(0, \tau) = \mathcal{D}_2 \delta(\tau),$$

.

$$\kappa_{2n+1}^{\xi}(0, \tau_2, \dots, \tau_{2n+1}) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} \kappa_{2n}^{\xi}(0, \tau_2, \dots, \tau_{2n}) &= \frac{\mathcal{D}_{2n}}{C_{2n-1}^n} C_{2n-1}^n \{[\delta(\tau_2) \dots \\ &\dots \delta(\tau_{n+1}) \uparrow (\tau_{n+2}) \dots \uparrow (\tau_{2n})]\}_s. \end{aligned}$$

Кумулянтные коэффициенты такого совершенно случайного процесса все конечны и равны ($n = 1, 2, 3, \dots$) $\gamma_{2n+1} = 0$, $\gamma_{2n} = \mathcal{D}_{2n}/\mathcal{D}_2^n$. Если теперь вычислить кумулянты вероятностного распределения выходной координаты

$$\begin{aligned} \kappa_s^x &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(u_1) \dots \varphi(u_s) \kappa_s^{\xi}(0, u_1 - u_2, u_1 - u_3, \dots, u_1 - u_s) \times \\ &\times du_1 \dots du_s, \end{aligned} \quad (12.7.2)$$

то получим

$$\kappa_1^x = 0, \quad \kappa_2^x = \mathcal{D}_2/2a, \quad \kappa_3^x = \kappa_4^x = \dots = \kappa_s^x = 0.$$

Таким образом, в данном случае выходной процесс получился гауссовым, а эффект нормализации проявился в том, что все высшие кумулянтные коэффициенты уменьшились в бесконечное число раз и обратились в нуль.

Пример 12.7.2. Пусть по-прежнему $\varphi(t) = e^{-at}1(t)$, а кумулянтные функции совершенно случайного стационарного негауссова процесса $\xi(t)$ равны

$$\kappa_1^{\xi}(t) = 0, \quad \kappa_s^{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_s) = \mathcal{D}_s \delta(t_2 - t_1) \dots \delta(t_s - t_1). \quad (12.7.3)$$

В этом случае (12.7.2) дает

$$\kappa_1^x = 0, \quad \kappa_s^x = \mathcal{D}_s/sa, \quad s = 2, 3, \dots$$

Таким образом, несмотря на то, что на входе линейной инерционной системы мы имеем сколь угодно быстрый случайный процесс, все времена статистической зависимости которого равны нулю, т. е. они сколь угодно малы по сравнению с постоянной времени системы, тем не менее на выходе этой системы процесс негауссов.

Но и в этом примере эффект нормализации имеет место. В самом деле, если рассматривать кумулянтные коэффициенты, соответствующие (12.7.3), то они равны бесконечности, ибо преобразуемый процесс $\xi(t)$ есть дельта-процесс, сколь угодно «далекий» от гауссова. На выходе же кумулянтные коэффициенты стали конечными, равными

$$\gamma_s = \mathcal{D}_s (2a)^{s/2} / sa \mathcal{D}_2^{s/2}, \quad s \geq 3.$$

Таким образом, кумулянтные коэффициенты, как и в первом примере, уменьшились в бесконечно большое число раз. А это и должно быть рассмотрено как эффект нормализации. Именно таким образом и раскрывается парадокс, отмеченный в § 12.3.

12.8. Эффект денормализации процесса инерционной системой

1. В предыдущем параграфе мы установили, что то или иное преобразование вероятностного распределения линейной системой определяется соотношением $T_{\text{вх}}/T_{\text{вых}}$. Если $T_{\text{вых}} > T_{\text{вх}}$, то имеет место нормализация распределения, если же $T_{\text{вых}} < T_{\text{вх}}$, то согласно (12.7.1) должен иметь место эффект денормализации. Другими словами, линейная система будет денормализовать вероятностное распределение, если она будет укорачивать проходящий через нее элементарный импульс.

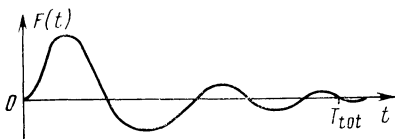


Рис. 12.1.

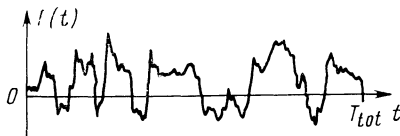


Рис. 12.2.

Таким образом, весь вопрос сводится к тому, может ли инерционная система укорачивать проходящий через нее импульс? На первый взгляд кажется, что нет, ибо инерционность в том и проявляется, что в ответ на некоторый входной импульс система долго «звонит». Расчеты, проведенные в предыдущем параграфе, также показали, что независимо от того, имеет место $T_{\phi} \ll T_{\text{вх}}$ или $T_{\phi} \gg T_{\text{вх}}$, всегда $T_{\text{вых}}$ не меньше, чем $T_{\text{вх}}$.

Тем не менее, возможна такая ситуация, в которой, несмотря на инерционность системы, возникает укорочение элементарного импульса, и весьма существенное [52, 58, 59].

2. Рассмотрим внимательнее временные характеристики элементарного импульса и линейной системы. Пусть имеем какой-либо импульс $F(t)$, начинающийся в момент $t = 0$ (рис. 12.1). Этот импульс принадлежит к первой группе сигналов, имея начало и конец. Для него можно ввести понятие *полной длительности* импульса T_{tot} таким образом, что для $t > T_{\text{tot}}$ можно считать $F(t) \equiv 0$. Затем существует эффективная длительность сигнала [ср. с (11.2.5)]

$$T_F \equiv \frac{1}{F_0^2} \int_0^{\infty} F^2(t) dt, \quad (12.8.1)$$

которая всегда не более T_{tot} , а может быть и существенно меньше.

Существует, наконец, и третья временная характеристика того же самого импульса — его время корреляции, определяемое соглас-

но (11.2.6) как эффективная длительность функции корреляции импульса

$$\tau_F \equiv \frac{1}{\Psi_F^2(0)} \int_0^{\infty} \Psi_F^2(\tau) d\tau, \quad (12.8.2)$$

где

$$\Psi_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) F(t + \tau) dt.$$

Время корреляции τ_F также не превышает полную длительность и может различным образом соотноситься с ней. Для рассматриваемой ситуации существенным является случай, когда $\tau_F \ll T_F$, что верно для импульса сложного типа (см. § 11.2), например, для «белого» шума (рис. 12.2).

Обратимся теперь к линейной инерционной системе, характеризуемой переходной функцией $\varphi(t)$, которую также можно описывать эффективной длительностью T_φ — временем релаксации системы — и временем корреляции τ_φ . Между T_φ и τ_φ также возможны различные соотношения в зависимости от типа системы (§ 11.2). Если $\tau_\varphi \ll T_\varphi$, то имеется линейная система сложного типа, характеризующая тем, что ее отклик на входное дельта-воздействие похож на отрезок реализации дельта-коррелированного шума*. Для рассматриваемой ситуации опять же существенным является случай линейной системы *сложного* типа.

Рассмотрим в качестве линейной системы так называемый *согласованный фильтр*. Под этим термином понимается линейный фильтр, согласованный с сигналом, поступающим на его вход. А именно, если входной импульс обозначить через $F(t)$, то линейный фильтр будет считаться по определению согласованным с этим сигналом, если его переходная функция равна $\varphi(t) = F(t_0 - t)$, где t_0 — произвольная временная задержка.

Легко определить выходную реакцию согласованного фильтра на соответствующий входной сигнал

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) F(t - u) du = \int_{-\infty}^{\infty} F(t_0 - u) F(t - u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(v) F(v + t - t_0) dv = \Psi_F(t - t_0). \end{aligned}$$

Таким образом, на выходе согласованного фильтра получается функция корреляции того сигнала, с которым согласован фильтр. Если

* Такие линейные системы широко используются в некоторых радиотехнических устройствах (см., например, [60, 61]).

же на вход такого фильтра подать другой сигнал первой группы, например, $H(t)$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) H(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} F(t_0-u) H(t-u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(v) H(v+t-t_0) dv = \Psi_{FH}(t-t_0),\end{aligned}$$

т. е. выходная реакция согласованного фильтра на произвольный импульс будет представлять собой совместную функцию корреляции первого рода. Это значит, что согласованный фильтр является попросту *коррелятором*.

3. Рассмотрим теперь случай, когда линейной системой, преобразующей вероятностное распределение пуассоновского случайного процесса, является фильтр, согласованный с элементарным импульсом входного процесса. Входным импульсом будет $F(t)$, а выходным $\Psi_F(\tau)$. В соответствии с (12.8.1) и (12.8.2) эффективная длительность входного импульса равна $T_{\text{вх}} = T_F$, а эффективная длительность выходного импульса равна $T_{\text{вых}} = \tau_F$. И если элементарный импульс представляет собой импульс сложного типа, то мы имеем $T_{\text{вых}} = \tau_F \ll T_F = T_{\text{вх}}$.

Следовательно, налицо сильное укорочение элементарного импульса, и поэтому в соответствии с (12.7.1) должен иметь место эффект денормализации случайного процесса. При этом необходимо отметить, что фильтр, согласованный со сложным сигналом, сам является системой сложного типа, поскольку $\tau_F = \tau_F \ll T_F = T_\varphi$.

Если же рассматривать прохождение простого импульса через фильтр, согласованный с этим простым импульсом, то никакого укорочения длительности импульса не последует, поскольку для простого импульса $\tau_F \sim T_F$, хотя по-прежнему будет $T_{\text{вых}} = \tau_F$, $T_{\text{вх}} = T_F$.

В чем заключается механизм укорочения импульса? Каким образом инерционная линейная система, реагирующая на дельта-импульс продолжительным откликом длительностью T_F , выдает в ответ на сложный импульс $F(t)$ гораздо более короткий отклик $\Psi_F(t-t_0)$ длительностью τ_F ?

Конечно, не следует думать, что рассматриваемое укорочение означает, что вне интервала τ_F на выходе системы сигнал равен нулю. Если искать полную длительность импульса, то для выходного импульса $\Psi_F(t-t_0)$ полная длительность, разумеется, гораздо больше не только τ_F , но и T_F , поскольку выходной сигнал должен существовать еще время $T_\varphi = T_F$ спустя после того, как закончился импульс, поданный на вход рассматриваемой системы (рис. 12.3). Однако в преобразовании вероятностных распределений основную роль играет не полная длительность импульса, а длительность τ_F , определенная формулой (12.8.2) и являющаяся, по существу, *энергетической* длительностью, т. е. тем интервалом времени, в котором содержится подавляющая часть энергии импульса. Именно

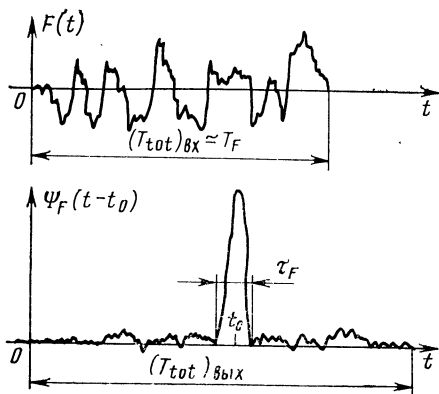


Рис. 12.3.

эта длительность и укорачивается, в то время как полная длительность импульса, как и должно быть, всегда увеличивается при прохождении сигнала через инерционную линейную систему.

4. В литературе (см., например, [8, 9]) почти повсеместно условием нормализации считается условие инерционности системы по сравнению с временем корреляции входного процесса. Для рассматриваемых здесь пуассоновских случайных процессов время корреляции

входного процесса есть не что иное, как время корреляции элементарного входного импульса τ_F . Тем самым, это общепринятое условие нормализации имеет вид

$$T_\Phi \gg \tau_F. \quad (12.8.3)$$

Допустим, что это условие выполнено, и рассмотрим, действительно ли всегда это условие сопровождается нормализацией.

Случай I. Простой импульс и простая система:

$$T_{\text{вых}} \sim \tau_{\text{вых}} \sim T_\Phi \gg \tau_F \sim T_F = T_{\text{вх}}$$

и, таким образом, в этом случае условие (12.8.3) действительно ведет к нормализации.

Случай II. Простой импульс и сложная система:

$$T_{\text{вых}} \sim T_\Phi \gg \tau_F \sim T_F = T_{\text{вх}},$$

и, следовательно, опять имеем нормализацию.

Случай III. Сложный импульс и простая система:

$$T_{\text{вых}} \sim \tau_{\text{вых}} \sim T_\Phi \gg \tau_F \ll T_F = T_{\text{вх}}.$$

В общем случае ситуация не определена. Может быть как денормализация, так и нормализация. В последнем случае должно быть $T_\Phi \gg T_F$ — система должна быть сильно инерционной не только по сравнению с временем корреляции входа, но и по сравнению с длительностью входного импульса.

Случай IV. Сложный импульс и сложная система:

$$\tau_\Phi \ll T_\Phi \gg \tau_F \ll T_F = T_{\text{вх}}.$$

В общем случае ситуация не определена. Все зависит от того, чему равно $T_{\text{вых}}$, поскольку неравенство (12.8.3) никаких ограничений на отношение $T_{\text{вых}}/T_{\text{вх}}$ не накладывает. Если $T_{\text{вых}} \gg T_{\text{вх}}$, для чего, по крайней мере, необходимо, чтобы $T_\Phi \gg T_F$,

то будет нормализация; если же $T_{\text{вых}} \ll T_{\text{вх}}$, как, например, это имеет место для согласованного фильтра, для которого

$$T_{\text{вх}} = T_F = T_{\varphi} \gg \tau_F = T_{\text{вых}}, \quad (12.8.4)$$

то получим денормализацию. Причем особенно интересно отметить, что чем сильнее выполнено неравенство (12.8.3), тем в этом случае, согласно (12.8.4), сильнее денормализация. Следовательно, в случае сложных импульсов и согласованных фильтров общепринятое условие нормализации (12.8.3) является на самом деле *условием денормализации*.

Глава 13

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРОВ

13.1. Спектры суперпозиции

1. Пусть стационарная совокупность входных случайных процессов $y = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_K(t)\}$ преобразуется в выходную совокупность $z = \{z_1(t), z_2(t), \dots, z_L(t)\}$ линейным безынерционным преобразованием

$$z(t) = Ay(t)$$

с матрицей преобразования $A = \|A_{ij}\|$, $i = 1, 2, \dots, L; j = 1, 2, \dots, K$. Найдем спектры выходного вектора $z(t)$, полагая, что спектры $y(t)$ известны. Заметим, что рассматриваемое преобразование не специфично для случайных процессов, оно в силу своей безынерционности характерно скорее для случайных величин, ибо при таком преобразовании спектры не деформируются.

Задание спектров входной совокупности означает, что нам задана спектральная матрица (см. § 8.2) $S_y(\omega) = \|S_{y_i y_j}(\omega)\|$.

Не представляет никакого труда отыскать спектральную матрицу выходной совокупности, если воспользоваться изложенным в § 9.4 символическим методом. Согласно этому методу спектральная матрица может быть определена как

$$\langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^+(\omega) \rangle \rightarrow S_y(\omega),$$

где $\hat{y}(\omega)$ есть вектор-столбец с компонентами:

$$\hat{y}_i(\omega) = \mathcal{F}\{y_i(t); -\omega t\}.$$

Также определяется и совместная спектральная матрица двух векторных стационарных случайных процессов:

$$\langle \hat{y}(\omega) \hat{x}^+(\omega) \rangle \rightarrow S_{yx}(\omega).$$

Используя этот метод, получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{z}(\omega) \hat{z}^+(\omega) \rangle &= \langle \hat{A}y(\omega) (\hat{A}y(\omega))^+ \rangle = \\ &= \langle \hat{A} \hat{y}(\omega) \hat{y}^+(\omega) \hat{A}^+ \rangle = \hat{A} \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^+(\omega) \rangle \hat{A}^+. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_z(\omega) = \hat{A} S_y(\omega) \hat{A}^+.$$

Такова спектральная матрица выходной совокупности случайных процессов.

В соответствии с разложением корреляционной матрицы на четную и нечетную части аналогичным образом может быть разложена и спектральная матрица:

$$S_z(\omega) = S_z^0(\omega) - jS_z^1(\omega).$$

При этом

$$S_z^0(\omega) = \hat{A} S_y^0(\omega) \hat{A}^+, \quad S_z^1(\omega) = \hat{A} S_y^1(\omega) \hat{A}^+. \quad (13.1.1)$$

2. Рассмотрим теперь преобразование спектров высших порядков. Начнем со спектров суперпозиции двух случайных процессов. Если случайные процессы $x(t)$, $y(t)$ образуют стационарную совокупность, то кумулянтные функции их суперпозиции $ax(t) + by(t)$ равны согласно (12.5.3)

$$\begin{aligned} \kappa_s^{ax+by}(0, \tau_2, \dots, \tau_s) &= \\ &= \sum_{l=0}^s a^{s-l} b^l C_s^l \{ \kappa_{s-l}^{x,y,l}(0, \tau_2, \dots, \tau_{s-l}; \tau_{s-l+1}, \dots, \tau_s) \}_s. \end{aligned}$$

Выполняя преобразование Фурье обеих частей этого равенства, с помощью (8.3.3) и (8.3.12) найдем

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_s^{ax+by}(0, \omega_2, \dots, \omega_s) &= \\ &= \sum_{l=0}^s a^{s-l} b^l C_s^l \{ \hat{\kappa}_{s-l}^{x,y,l}(0, \omega_2, \dots, \omega_{s-l}; \omega_{s-l+1}, \dots, \omega_s) \}_s. \end{aligned} \quad (13.1.2)$$

Каждая скобка симметризации в (13.1.2) содержит C_s^l слагаемых и является симметрической функцией всех входящих в нее аргументов.

Итак, спектральная плотность любого порядка суперпозиции двух случайных процессов определяется соответствующими совместными спектральными плотностями совокупности этих процессов.

3. Если имеется суперпозиция многих случайных процессов

$$z = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_N x_N(t),$$

то, совершая преобразование Фурье (12.5.4), получим следующее

выражение для спектральных плотностей высших порядков процесса $z(t)$:

$$\begin{aligned} & \hat{\chi}_s^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N} (0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) = \\ & = \sum_{l_1 + l_2 + \dots + l_N = s} a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_N^{l_N} \frac{s!}{l_1! l_2! \dots l_N!} \times \\ & \times \left\{ \hat{\chi}_{l_1, l_2, \dots, l_N}^{x_1, x_2, \dots, x_N} (0, \omega_2, \dots, \omega_{l_1}; \omega_{l_1+1}, \dots, \omega_{l_1+l_2}; \dots; \omega_s - l_{N+1}, \dots, \omega_s) \right\}_s. \end{aligned}$$

Если случайные процессы $x_k(t)$ все статистически независимы, то их суперпозиции соответствует суперпозиция спектральных плотностей:

$$\hat{\chi}_s^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N} (0, \omega_2, \dots, \omega_s) = \sum_{k=1}^N a_k^s \hat{\chi}_s^{x_k} (0, \omega_2, \dots, \omega_s).$$

13.2. Преобразование спектров дифференцирующей системой

1. Обобщим теперь результаты, полученные в предыдущем параграфе, на случай, когда матрица преобразования зависит от оператора дифференцирования $p = d/dt$, т. е. когда преобразование $y(t) \rightarrow z(t)$ описывается системой с дифференциальной правой частью

$$z(t) = M(p) y(t), \quad (13.2.1)$$

где $y(t)$ — стационарный векторный процесс.

Чтобы отыскать спектр мощности выходной совокупности случайных процессов, найдем прежде всего корреляционную матрицу вектора $z(t)$. Для этого рассмотрим вектор, эрмитово сопряженный $z(t)$:

$$z^+(t') = (M(p') y(t'))^+ = y^+(t') M^+(p'). \quad (13.2.2)$$

Здесь $p' = d/dt'$. Запись $x(t) M^+(p)$ следует истолковывать как такой вектор, компонента которого равна

$$(x(t) M^+(p))_j = \sum_i x_i M_{ij}^+(p) = \sum_i M_{ji}(p) x_i(t). \quad (13.2.3)$$

Следовательно, тот факт, что в левой части (13.2.2) оператор d/dt стоит *после* функции, на которую он действует, следует понимать лишь как формальную запись, при раскрытии которой оператор всегда будет стоять *перед* функцией.

Составляя произведение (13.2.1) на (13.2.2) и усредняя, получим

$$K_z[t, t'] = M \left(\frac{d}{dt} \right) K_y[t, t'] M^+ \left(\frac{d}{dt'} \right).$$

Вследствие стационарности $y(t)$ это выражение принимает следующий окончательный вид:

$$K_z[\tau] = M \left(-\frac{d}{d\tau} \right) K_y[\tau] M^+ \left(\frac{d}{d\tau} \right). \quad (13.2.4)$$

Для сопряженной корреляционной матрицы будем иметь

$$K_z^+[\tau] = M \left(\frac{d}{d\tau} \right) K_y^+[\tau] M^+ \left(-\frac{d}{d\tau} \right).$$

2. Теперь уже нетрудно записать выражение и для спектральной матрицы случайного стационарного вектора $z(t)$, выполнив преобразование Фурье (13.2.4):

$$S_z(\omega) = M(j\omega) S_y(\omega) M^+(j\omega). \quad (13.2.5)$$

Это же самое выражение можно получить и по-другому, если использовать символический метод, согласно которому

$$\begin{aligned} \langle \hat{z}(\omega) \hat{z}^+(\omega) \rangle &= \langle M(j\omega) \hat{y}(\omega) [M(j\omega) \hat{y}(\omega)]^+ \rangle = \\ &= \langle M(j\omega) \hat{y}(\omega) \hat{y}^+(\omega) M^+(j\omega) \rangle = \\ &= M(j\omega) \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^+(\omega) \rangle M^+(j\omega). \end{aligned}$$

Если принять во внимание, что [см. (8.2.10)]

$$S_z^+(\omega) = M(-j\omega) S_y^*(\omega) M^+(-j\omega),$$

то нетрудно получить выражения для четной и нечетной компонент спектральной матрицы процесса $z(t)$:

$$\begin{aligned} S_z^0(\omega) &= \frac{1}{2} \{ M(j\omega) S_y(\omega) M^+(j\omega) + \\ &+ M(-j\omega) S_y^*(\omega) M^+(-j\omega) \}, \\ S_z^1(\omega) &= \frac{1}{2} j \{ M(j\omega) S_y(\omega) M^+(j\omega) - \\ &- M(-j\omega) S_y^*(\omega) M^+(-j\omega) \}. \end{aligned}$$

3. Рассмотрим теперь преобразование высших спектров, ограничившись для простоты случаем скалярной переменной

$$z(t) = M(p) y(t) \quad (13.2.6)$$

и рассматривая, как и ранее, случайный стационарный процесс $y(t)$, спектральные плотности высших порядков которого $\hat{\kappa}_s^y(0, \omega_2, \dots, \omega_s)$ полагаем заданными. Спектры высших порядков для случайного стационарного процесса $z(t)$ легко могут быть определены на основании результатов § 9.4 и 9.2. Заменяя $\partial/\partial\tau_k$ на $j\omega_k$, а κ_s на $\hat{\kappa}_s$, из (12.2.5) находим следующую основную формулу:

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_s^z(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) &= \\ &= M \left(-\sum_{k=2}^s j\omega_k \right) \prod_{l=2}^s M(j\omega_l) \hat{\kappa}_s^y(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s). \end{aligned} \quad (13.2.7)$$

Так, например,

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_2^z(0, \omega) &= M(-j\omega) M(j\omega) \hat{\kappa}_2^y(0, \omega), \\ \hat{\kappa}_3^z(0, \omega_2, \omega_3) &= M(-j\omega_2 - j\omega_3) M(j\omega_2) M(j\omega_3) \times \\ &\times \hat{\kappa}_3^y(0, \omega_2, \omega_3), \\ \hat{\kappa}_4^z(0, \omega_2, \omega_3, \omega_4) &= M(-j\omega_2 - j\omega_3 - j\omega_4) M(j\omega_2) \times \\ &\times M(j\omega_3) M(j\omega_4) \hat{\kappa}_4^y(0, \omega_2, \omega_3, \omega_4).\end{aligned}$$

Формула (13.2.7) показывает, что действие оператора $M(p)$ на процесс эквивалентно умножению его высших спектральных плотностей на некоторую функцию частот, которая является ничем иным, как частотной характеристикой высшего порядка (см. § 11.2):

$$K_s(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) \equiv M\left(-\sum_{k=2}^s j\omega_k\right) \prod_{l=2}^s M(j\omega_l). \quad (13.2.8)$$

При использовании этой частотной характеристики, описывающей линейную систему (13.2.6), высшие спектральные плотности преобразуются как

$$\hat{\kappa}_s^z(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) = K_s(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) \hat{\kappa}_s^y(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s).$$

При $s = 2$ отсюда получаем обычную частотную характеристику системы:

$$K_2(\omega) = M(-j\omega) M(j\omega) = |M(j\omega)|^2,$$

которая является вещественной функцией частоты, в отличие от $K_s(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$.

Таким образом, последовательность частотных характеристик $K_2(\omega_2)$, $K_3(\omega_2, \omega_3)$, $K_4(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$, ..., $K_s(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$, ..., определенных формулой (13.2.8), вместе с $M(0)$ *исчерпывающим образом* представляет линейную систему, описываемую операторным уравнением (13.2.6).

13.3. Преобразование спектров инерционной системой

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$N(p)x(t) = z(t) \quad (13.3.1)$$

и отыщем спектры установившегося случайного процесса $x(t)$, предполагая, что все спектры стационарного случайного процесса $z(t)$ нам заданы.

Решение уравнения (13.3.1) для установившегося движения согласно (11.1.11) имеет вид

$$x(t) = \int_0^\infty \Phi(u) z(t-u) du.$$

Решить поставленную задачу можно без труда двумя путями. Во-первых, можно воспользоваться полученным в § 12.1 выражением для связи кумулянтных функций процессов $x(t)$ и $z(t)$ [см. (12.1.10)]:

$$\kappa_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = a_s^\varphi(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) \otimes \otimes \kappa_s^z(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s).$$

Выполняя операцию преобразования Фурье от левой и правой части этого выражения и учитывая, что преобразование Фурье свертки есть произведение преобразований Фурье сомножителей, найдем

$$\hat{\kappa}_s^x(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) = K_s^\varphi(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) \times \times \hat{\kappa}_s^z(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s), \quad (13.3.2)$$

где согласно (11.2.8)

$$K_s^\varphi(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) = (2\pi)^{s-1} \hat{a}_s^\varphi(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$$

есть частотные характеристики высшего порядка линейной инерционной системы, обладающей переходной функцией $\varphi(t)$.

Во-вторых, можно воспользоваться результатами предыдущего параграфа. Так как уравнению (13.2.6) соответствует преобразование спектров (13.2.7), то, следовательно, уравнению (13.3.1) будет соответствовать преобразование

$$N\left(-\sum_{k=2}^s j\omega_k\right) \prod_{l=2}^s N(j\omega_l) \hat{\kappa}_s^x(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) = = \hat{\kappa}_s^z(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s).$$

Записывая это выражение в виде (13.3.2), мы найдем, что частотные характеристики высшего порядка линейной системы, соответствующей уравнению (13.3.1), равны

$$K_s^\varphi(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) = \left[N\left(-\sum_{k=2}^s j\omega_k\right) \prod_{l=2}^s N(j\omega_l) \right]^{-1}. \quad (13.3.3)$$

Полагая $s=2$, получаем известный закон преобразования спектров мощности:

$$G_x(\omega) = |N(j\omega)|^{-2} G_z(\omega).$$

2. Обратимся к примеру преобразования спектров.

Пример 13.3.1. Рассмотрим линейную систему, описываемую дифференциальным уравнением первого порядка

$$dx/dt + ax = z(t).$$

В данном случае $N(j\omega) = j\omega + a$. Следовательно, спектральные плотности процесса $x(t)$ следующим образом связаны со спектральными плотностями процесса $z(t)$:

$$\hat{\kappa}_s^x(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) = \frac{\hat{\kappa}_s^z(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)}{[a - j(\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_s)](a + j\omega_2) \times \times (a + j\omega_3) \dots (a + j\omega_s)}.$$

Так, для $s = 2$ $G_x(\omega) = G_z(\omega)/(a^2 + \omega^2)$, а для $s = 3$

$$\hat{\kappa}_3^x(0, \omega_2, \omega_3) = \frac{\hat{\kappa}_3^z(0, \omega_2, \omega_3)}{[a - j(\omega_2 + \omega_3)][a^2 + ja(\omega_2 + \omega_3) - \omega_2\omega_3]}.$$

3. То, что частотные характеристики высших порядков линейной системы, согласно (11.2.8), являются с точностью до множителя коэффициентами Фурье временных моментных функций системы, позволяет без труда получать информацию о возможном виде высших спектральных плотностей какого-либо негауссова случайного процесса.

В самом деле, поскольку, согласно § 11.2, моментные функции системы $a_s^{\Phi}(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s)$ обладают всеми свойствами кумулянтных функций, то $\hat{a}_s^{\Phi}(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$, а следовательно, и $K_s(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s)$ обладают всеми свойствами спектральных плотностей высших порядков стационарного случайного процесса. Отсюда на основании (13.2.8), (13.3.3) следует, в свою очередь, что последовательность спектральных плотностей

$$\hat{\chi}_2(0, \omega), \hat{\chi}_3(0, \omega_2, \omega_3), \dots, \hat{\chi}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s), \dots,$$

дающую исчерпывающую информацию о негауссовом случайном процессе, можно строить с помощью любых линейных операторов $N(p)$ или $M(p)$.

Рассмотрим пример 13.3.1. Если взять значение $N(p) = p + a$, то на основании вышесказанного последовательность спектральных плотностей некоторого негауссова случайного процесса может иметь вид

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_2(0, \omega) &= a_2 / (a - j\omega) (a + j\omega), \\ \hat{\kappa}_3(0, \omega_2, \omega_3) &= a_3 / [a - j(\omega_2 + \omega_3)] [a + j\omega_2] [a + j\omega_3], \\ &\vdots \\ \hat{\kappa}_s(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) &= a_s / [a - j(\omega_2 + \omega_3 + \dots + \\ &+ \omega_s)] [a + j\omega_2] [a + j\omega_3] \cdot \dots \cdot [a + j\omega_s]. \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

Здесь a_k — некоторые коэффициенты. Если их выбрать в виде $a_k = \mathcal{D}_k / (2\pi)^{k-1}$, то на основании (13.3.4) и (8.3.6) легко сделать вывод о том, что построенный набор спектральных плотностей описывает негауссовый случайный процесс $x(t)$, связанный с дельта-процессом $\xi(t)$ дифференциальным уравнением

$$dx/dt + ax = \xi(t).$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава 14

БЕЗЫНЕРЦИОННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

14.1. Постановка задачи

1. Формулировка задачи о нелинейном преобразовании случайных процессов $x(t) \rightarrow y(t)$ остается прежней: предполагаются известными все статистические характеристики входного процесса $x(t)$, требуется отыскать их для выходного процесса $y(t)$.

Все реальные нелинейные преобразования сигналов, встречающиеся в различных системах радиотехники и радиофизики, являются инерционными. Это значит, что значение выходного процесса в заданный момент времени определяется некоторой нелинейной операцией над значениями входного воздействия, взятыми на целом множестве предыдущих значений времени.

В ряде случаев инерционностью нелинейных систем можно пренебречь и рассматривать безынерционные системы, являющиеся вполне удовлетворительной аппроксимацией для многих практических ситуаций. Выходная переменная безынерционной нелинейной системы в момент t определяется значением входной переменной в тот же момент. Поэтому соотношение между $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеет вид $y = f(x)$, где $f(x)$ — некоторая нелинейная функция, полностью задающая нелинейное преобразование.

2. В отличие от линейных преобразований случайных процессов, обладающих некоторыми общими закономерностями, нелинейные преобразования, на первый взгляд, вообще не проявляют каких-либо общих свойств по отношению к спектрально-вероятностным характеристикам случайных процессов, а все определяется конкретным процессом и конкретной нелинейностью.

Так, если на вход нелинейного преобразования $x \rightarrow y = f(x)$, где $f(x)$ кусочно-непрерывная функция, подавать гауссов процесс $x(t)$, то вероятностное распределение выходной переменной $y(t)$ будет существеннейшим образом зависеть не только от вида функции $f(x)$ и входного распределения, но и от простейших параметров

входного процесса — среднего и дисперсии. Изменение одного лишь среднего значения может очень сильно изменить вид выходного распределения. Возможны случаи, в которых при произвольном спектре мощности входного процесса на выходе нелинейного устройства вообще будет отсутствовать какой-либо шум (квадратичное детектирование телеграфного сигнала) — рис. 14.1.

Таким образом, как вероятностное распределение, так и спектр случайного процесса могут весьма замысловатым образом преобразовываться нелинейными безынерционными устройствами.

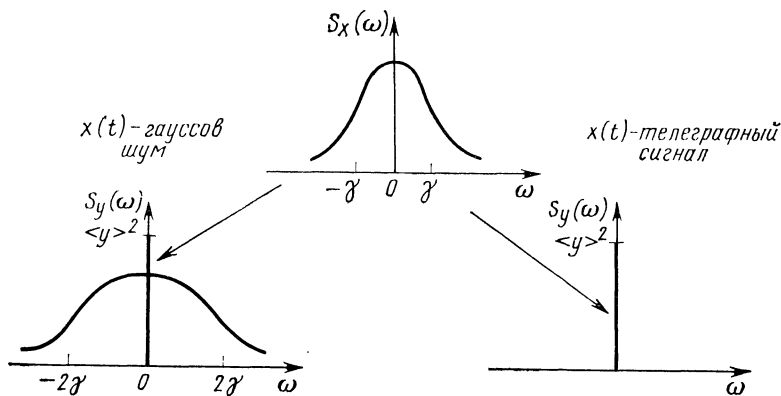


Рис. 14.1.

Тем не менее, разумеется, и для нелинейного безынерционного преобразования случайных процессов существуют определенные закономерности. Их выявление и составляет цель настоящей главы.

14.2. Преобразование характеристик одномоментного распределения

1. Пусть входное одномоментное распределение случайного процесса $W_x(x, t)$ представлено набором кумулянтов $\kappa_s^x(t)$. Очевидно, что любая статистическая характеристика выходного распределения $W_y(y, t)$ зависит от $\kappa_s^x(t)$, в том числе его моменты и кумулянты. Требуется отыскать эти зависимости. Поставленная задача, в принципе, решается несложно, если воспользоваться результатами § 3.2 и 4.5, полученными для случайных величин, и распространить их на случайные процессы. Эта операция производится без труда, ибо случайный процесс представляет собой ту же случайную величину, но зависящую от параметра. И так как кумулянтные уравнения при этом не изменяют своего вида вследствие того, что дифференцирование в них производится лишь по кумулянтам и по случайной переменной, то они могут быть непосредственно записаны и для случайных процессов.

Таким образом, если случайный процесс $x_t = x(t)$ задан набором своих кумулянтов $\kappa_s^x(t)$, то производная среднего значения функции $g(x_t)$ от случайного процесса по этим кумулянтам на основании (3.2.2) равна

$$\frac{\partial \langle g(x_t) \rangle}{\partial \kappa_s^x(t)} = \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s g(x_t)}{dx_t^s} \right\rangle.$$

Аналогичным образом вместо, например, (3.2.3), (3.2.4) мы можем использовать формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \langle g(x_t) \rangle}{(\partial \kappa_s^x(t))^n} &= \frac{1}{(s!)^n} \left\langle \frac{d^{sn}}{dx_t^{sn}} g(x_t) \right\rangle, \\ \frac{\partial^2 \langle g(x_t) \rangle}{\partial \kappa_s^x(t) \partial \kappa_p^x(t)} &= \frac{1}{s! p!} \left\langle \frac{d^{s+p}}{dx_t^{s+p}} g(x_t) \right\rangle \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

2. Подобные формулы позволяют сразу же написать уравнения для произвольных моментов «выхода» безынерционного преобразования $y_t = f(x_t)$, связывающие их с кумулянтами входного распределения. В самом деле, полагая $g(x) = f^k(x)$, получаем [ср. с (4.5.1)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k^y(t)}{\partial \kappa_s^x(t)} &= \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dx_t^s} f^k(x_t) \right\rangle, \\ \frac{\partial^n \alpha_k^y(t)}{(\partial \kappa_s^x(t))^n} &= \frac{1}{(s!)^n} \left\langle \frac{d^{sn}}{dx_t^{sn}} f^k(x_t) \right\rangle \end{aligned}$$

и вообще

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_i n_i}{\partial^i} \alpha_k^y(t) \\ &= \frac{(\partial \kappa_{s_1}^x(t))^{n_1} (\partial \kappa_{s_2}^x(t))^{n_2} \dots (\partial \kappa_{s_N}^x(t))^{n_N}}{1} = \\ &= \frac{1}{(s_1!)^{n_1} (s_2!)^{n_2} \dots (s_N!)^{n_N}} \left\langle \frac{d^i}{dx_t^i} f^k(x_t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Как уже указывалось, полученные выражения носят характер дифференциальных уравнений, решая которые при определенных начальных условиях можно найти зависимость $\alpha_k^y(t)$ от $\kappa_1^x(t)$, $\kappa_2^x(t)$, ..., $\kappa_s^x(t)$. Естественно возникает вопрос: не легче ли непосредственно вычислять $\langle f^k(x_t) \rangle = \alpha_k^y(t)$ по заданному распределению $W_x(x, t)$ вместо того, чтобы решать дифференциальные уравнения? В некоторых наиболее простых ситуациях это, разумеется, так. Однако часто именно путь кумулянтных уравнений скорее

приводит к цели, тем более, что в ряде случаев искомое среднее сравнительно просто можно найти в виде ряда по степеням $\kappa_s^x(t)$. Точно так же для нахождения каких-либо других параметров выходного распределения, в том числе и его кумулянтов, мы можем привлечь результаты четвертой главы и сразу же получить интересные нас характеристики.

3. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих использование полученных формул.

Пример 14.2.1. Если имеется нелинейное преобразование $y(t) = \exp[ax(t)]$, то с помощью (3.2.7) элементарно получаем моменты выходного процесса, выраженные через входные кумулянты

$$\alpha_k^y(t) = \exp \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(ka)^s}{s!} \kappa_s^x(t) \right].$$

Пример 14.2.2. Найдем взаимосвязь между дисперсией $D_y(t)$ случайного процесса $y(t)$, подвергнутого нелинейному преобразованию $y_t = f(x_t)$, и кумулянтами входа. Используя вторую формулу (4.5.5), имеем

$$\frac{\partial D_y(t)}{\partial \kappa_3^x(t)} = \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dx_t^s} [f^2(x_t) - 2 \langle f(x_t) \rangle f(x_t)] \right\rangle. \quad (14.2.1)$$

Отсюда, в частности, получаем [ср. с (4.5.6)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_y(t)}{\partial m_x(t)} &= 2 \langle f'(x_t), f'(x_t) \rangle, \\ \frac{\partial D_y(t)}{\partial D_x(t)} &= \langle f''(x_t)^2 \rangle + \langle f'(x_t), f''(x_t) \rangle, \\ \frac{\partial D_y(t)}{\partial \kappa_3^x(t)} &= \langle f'(x_t) f''(x_t) \rangle + \frac{1}{3} \langle f'(x_t), f'''(x_t) \rangle, \\ \frac{\partial D_y(t)}{\partial \kappa_4^x(t)} &= \frac{1}{4} \langle f''(x_t)^2 \rangle + \frac{1}{3} \langle f'(x_t) f'''(x_t) \rangle + \frac{1}{12} \langle f'(x_t), f^{(4)}(x_t) \rangle. \end{aligned} \quad (14.2.2)$$

Пример 14.2.3. Если преобразование является квадратичным: $y_t = Ax_t^2$, то с помощью формул (14.2.1), (14.2.2) легко находим следующее выражение для дисперсии выхода:

$$D_y(t) = A^2 [\kappa_4^x(t) + 4m_x(t) \kappa_3^x(t) + 2D_x^2(t) + 4m_x^2(t) D_x(t)]. \quad (14.2.3)$$

Напомним, что это выражение справедливо для любого вероятностного распределения входного случайного процесса $x(t)$. И вместе с тем, как следует из (14.2.3), на дисперсию выхода оказывают влияние только первые четыре кумулянта входного распределения независимо от того, какие значения принимают все остальные.

Полученное значение дисперсии, конечно, может быть найдено, в принципе, и из вероятностного распределения выходной пере-

менной $y(t)$:

$$W_y(y, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{A_y}} \left[W_x\left(\sqrt{\frac{y}{A}}, t\right) + W_x\left(-\sqrt{\frac{y}{A}}, t\right) \right], & y > 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Однако, как очевидно, непосредственное вычисление дисперсии и тем более высших кумулянтов с помощью $W_y(y, t)$ при произвольном распределении $W_x(x, t)$ встречает большие трудности.

4. Отыскание статистических характеристик выхода нелинейного преобразования упрощается, если входное распределение можно заменять модельным, и тем более упрощается, если оно является гауссовым. В первом случае любое среднее $\langle y_t^k \rangle$ можно разложить в многомерный степенной ряд по отличным от нуля кумулянтам, а во втором — в одномерный ряд по дисперсии согласно (4.6.5)—(4.6.7). Так, например, при гауссовом входе x_t выходной процесс $y_t = f(x_t)$ имеет следующее значение среднего:

$$m_y(t) = f(m_x(t)) + f''(m_x(t)) \frac{D_x(t)}{2} + \dots + \frac{1}{s!} f^{(2s)}(m_x(t)) \left(\frac{D_x(t)}{2} \right)^s + \dots$$

и среднего квадрата

$$\langle y^2(t) \rangle = f^2(m_x(t)) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left[\frac{d^{2s}}{dx^{2s}} f^2(x) \right]_{x=m_x(t)} \left(\frac{D_x(t)}{2} \right)^s,$$

а любой его момент удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^n \alpha_k^y(t)}{(\partial D_x(t))^n} = \frac{1}{2^n} \left\langle \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f^k(x_t) \right\rangle$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial^n \alpha_k^y(t)}{(\partial D_x(t))^n} \Big|_{D_x=0} = \frac{1}{2^n} \left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f^k(x) \right]_{x=m_x(t)}.$$

14.3. Преобразование характеристик двумоментного распределения

1. При анализе преобразований одномоментных распределений те или иные выходные характеристики все-таки могли быть получены и непосредственно через $W_y(y)$ хотя бы в виде квадратур.

Иное дело с выходными характеристиками двумоментного распределения, вычисление которых с помощью $W_y(y_1, t_1; y_2, t_2)$ практически возможно лишь для таких преобразований $x \rightarrow y$, для которых обратные функции $x = \varphi(y)$ всюду однозначны. По этой при-

чине наиболее удобным методом анализа нелинейных преобразований двумоментных распределений является опять же кумулянтный подход, основанный на использовании кумулянтных уравнений.

2. Рассмотрим произвольное нелинейное безынерционное преобразование $y_i = f(x_i)$ и поставим задачу отыскания характеристик выходного вероятностного распределения $W_y(y_1, t_1; y_2, t_2)$. Из-за безынерционности преобразования все эти характеристики могут быть полностью определены из заданного входного двумерного распределения $W_x(x_1, t_1; x_2, t_2)$, которое будем представлять набором кумулянтных функций $\kappa_{p+q}^x(t_1^{[p]}, t_2^{[q]})$.

Обозначая $x(t_1) = u$, $x(t_2) = v$ и $\kappa_{p+q}^x \equiv \kappa_{p,q}^{u,v}$, можно рассматривать u, v как пару случайных величин.

Пусть статистические характеристики выхода могут быть представлены средним значением произведения каких-либо функций

$$\begin{aligned} \langle F_1(y(t_1)) F_2(y(t_2)) \rangle &= \langle F_1(f(u)) F_2(f(v)) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{H}(u) \mathcal{G}(v) \rangle. \end{aligned}$$

Используя формулы (3.3.2)–(3.3.4), можем написать тогда

$$\frac{\partial^n \langle \mathcal{H}(u) \mathcal{G}(v) \rangle}{(\partial \kappa_{p,q}^{u,v})^n} = \frac{1}{(p! q!)^n} \langle \mathcal{H}^{(pn)}(u) \mathcal{G}^{(qn)}(v) \rangle, \quad (14.3.1)$$

а также

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+m} \langle \mathcal{H}(u) \mathcal{G}(v) \rangle}{(\partial \kappa_{p,q}^{u,v})^n (\partial \kappa_{r,s}^{u,v})^m} &= (p! q!)^{-n} (r! s!)^{-m} \langle \mathcal{H}^{(pn+rm)}(u) \times \\ &\times \mathcal{G}^{(qn+sm)}(v) \rangle. \end{aligned} \quad (14.3.2)$$

Здесь всюду в правых частях усреднение производится по статистическому ансамблю, соответствующему $W_x(u, t_1; v, t_2)$.

3. Обратимся к уравнениям для выходных моментных функций

$$\alpha_{k+l}^y(t_1^{[k]}, t_2^{[l]}) = \langle y^k(t_1) y^l(t_2) \rangle.$$

Полагая в (14.3.1)–(14.3.2) $\mathcal{H}(u) = f^k(u)$, $\mathcal{G}(v) = f^l(v)$, найдем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{n+m} \alpha_{k+l}^y(t_1^{[k]}, t_2^{[l]})}{(\partial \kappa_{p+q}^x(t_1^{[p]}, t_2^{[q]}))^n (\partial \kappa_{r+s}^x(t_1^{[r]}, t_2^{[s]}))^m} = \\ &= \frac{1}{(p! q!)^n (r! s!)^m} \left\langle \frac{d^{pn+rm}}{du^{pn+rm}} f^k(u) \frac{d^{qn+sm}}{dv^{qn+sm}} f^l(v) \right\rangle. \end{aligned} \quad (14.3.3)$$

Из этих формул следует, что все моментные функции выхода произвольного нелинейного преобразования зависят в общем случае от всех кумулянтных функций входа, причем нелинейно. То же самое справедливо и для корреляционной функции $K_y[t_1, t_2] = \langle y(t_1) y(t_2) \rangle$, поскольку

$$\frac{\partial K_y[t_1, t_2]}{\partial \kappa_{p+q}^x(t_1^{[p]}, t_2^{[q]})} = \frac{1}{p! q!} \langle f^{(p)}(u) f^{(q)}(v) \rangle, \quad (14.3.4)$$

а также

$$\frac{\partial^{n+m} K_y [t_1, t_2]}{(\partial \kappa_{p+q}^x (t_1^{[p]}, t_2^{[q]}))^n (\partial \kappa_{r+s}^x (t_1^{[r]}, t_2^{[s]}))^m} = \\ = (p! q!)^{-n} (r! s!)^{-m} \langle f^{(pn+rm)}(u) f^{(qn+sm)}(v) \rangle. \quad (14.3.5)$$

Правые части этих формул в случае произвольной функции $f(x)$ отличны от нуля при любых p, q, r, s . Но, если для каких-либо конкретных видов $f(x)$, например, полиномов, правые части, начиная с p_0, q_0, r_0, s_0 , обращаются в тождественный нуль, то это значит, что соответствующие моментные функции не зависят от кумулянтных функций входа, для которых $p \geq p_0, q \geq q_0, r \geq r_0, s \geq s_0$.

4. Если теперь интересоваться связью выходных кумулянтных функций с входными, то таких простых уравнений, какие получаются для моментных функций, в общем случае записать не удастся.

Можно воспользоваться также уравнениями для кумулянтных скобок, приведенными в § 4.7. Так, для кумулянтных функций второго и третьего порядков с помощью (4.7.4), (4.7.5) нетрудно найти следующие уравнения ($p \neq 0, q \neq 0$):

$$\frac{\partial \kappa_2^y(t_1, t_2)}{\partial \kappa_{p+q}^x(t_1^{[p]}, t_2^{[q]})} = \frac{1}{p! q!} \langle f^{(p)}(u) f^q(v) \rangle, \\ \frac{\partial \kappa_3^y(t_1, t_2, t_2)}{\partial \kappa_{p+q}^x(t_1^{[p]}, t_2^{[q]})} = \frac{1}{p! q!} \left[\langle f^{(p)}(u) \frac{d^q}{dv^q} f^2(v) \rangle - \right. \\ \left. - 2 \langle f(v) \rangle \langle f^{(p)}(u) f^q(v) \rangle \right], \\ \frac{\partial \kappa_3^y(t_1, t_1, t_2)}{\partial \kappa_{p+q}^x(t_1^{[p]}, t_2^{[q]})} = \frac{1}{p! q!} \left[\langle \frac{d^p}{du^p} f^2(u) f^q(v) \rangle - \right. \\ \left. - 2 \langle f(u) \rangle \langle f^{(p)}(u) f^q(v) \rangle \right].$$

Сравнивая первую формулу с (14.3.4), видим, что они совпадают. Это совпадение при $p \neq 0, q \neq 0$ будет распространяться и на высшие производные ковариационной функции. Так,

$$\frac{\partial^n \kappa_2^y(t_1, t_2)}{(\partial \kappa_{p+q}^x(t_1^{[p]}, t_2^{[q]}))^n} = \frac{\partial^n \alpha_2^y(t_1, t_2)}{(\partial \kappa_{p+q}^x(t_1^{[p]}, t_2^{[q]}))^n} = \\ = \frac{1}{(p! q!)^n} \langle f^{(pn)}(u) f^{(qn)}(v) \rangle. \quad (14.3.6)$$

Правые части всех формул двух последних пунктов вычисляются при $u = x(t_1), v = x(t_2)$.

5. Если входной процесс является стационарным случайным процессом, обладающим кумулянтными функциями ($x = x(t)$, $x_\tau = x(t + \tau)$) $\kappa_{p+q}^x(0^{[p]}, \tau^{[q]})$, то выходной процесс из-за безынерционности системы преобразования также будет стационарным, и мы в левых частях (14.3.3)—(14.3.5) должны заменить $\alpha_{k+l}^y(t_1^k, t_2^l)$ на $\alpha_{k+l}^y(0^{[k]}, \tau^{[l]})$, а правые вычислять при $u = x$, $v = x_\tau$. Так, например, для корреляционных функций выхода вместо (14.3.4), (14.3.5) мы будем иметь

$$\frac{\partial K_y[\tau]}{\partial \kappa_{p+q}^x(0^{[p]}, \tau^{[q]})} = \frac{1}{p! q!} \langle f^{(p)}(u) f^{(q)}(v) \rangle, \quad (14.3.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n+m} K_y[\tau]}{(\partial \kappa_{p+q}^x(0^{[p]}, \tau^{[q]})^n (\partial \kappa_{r+s}^x(0^{[r]}, \tau^{[s]})^m)} = \\ & = \frac{1}{(p! q!)^n (r! s!)^m} \langle f^{(pn+rm)}(u) f^{(qn+sm)}(v) \rangle. \end{aligned} \quad (14.3.8)$$

Если $p \neq 0$, $q \neq 0$, $n \neq 0$, то на основании (14.3.6) полученные формулы для производных корреляционной функции будут справедливыми и для ковариационной функции выхода, т. е., например,

$$\frac{\partial^n B_y[\tau]}{(\partial \kappa_{p+q}^x(0^{[p]}, \tau^{[q]})^n} = \frac{1}{(p! q!)^n} \langle f^{(pn)}(u) f^{(qn)}(v) \rangle. \quad (14.3.9)$$

14.4. Взаимосвязь ковариационных функций

1. Полагая в (14.3.7) $p = q = 1$, мы получим формулу

$$\frac{\partial^n K_y[\tau]}{(\partial B_x[\tau])^n} = \langle f^{(n)}(x) f^{(n)}(x_\tau) \rangle, \quad (14.4.1)$$

доказанную ранее Р. Прайсом [47—49] для гауссового случайного стационарного процесса $x(t)^*$. Как следует из вышеизложенного, эта формула является частным случаем общей формулы (14.3.8), показывающей взаимосвязь ковариационных функций входа и выхода нелинейного преобразования, и справедлива для *любого* вероятностного распределения входного случайного процесса.

Для производной ковариационной функции из (14.3.9), полагая $p = q = 1$, $n \geq 1$, найдем

$$\frac{\partial^n B_y[\tau]}{(\partial B_x[\tau])^n} = \langle f^{(n)}(x) f^{(n)}(x_\tau) \rangle. \quad (14.4.2)$$

* Точнее говоря, в предположении, что $\langle x \rangle = 0$, Р. Прайсом была доказана формула

$$\frac{\partial^n K_y[\tau]}{(\partial K_x[\tau])^n} = \langle f^{(n)}(x) f^{(n)}(x_\tau) \rangle.$$

2. Выясним теперь общий характер взаимосвязи $B_y [\tau]$ с $B_x [\tau]$ для произвольного нелинейного преобразования входного процесса. Правая часть (14.4.2) является функцией τ ($n \geq 1$)

$$\langle f^{(n)}(x) f^{(n)}(x_\tau) \rangle \equiv g_n(\tau).$$

Так как статистическое усреднение идет здесь с помощью негауссовой плотности вероятности $W_x(x, x_\tau; \tau)$, то $g_n(\tau)$ зависит от всех кумулянтных функций двумоментного распределения:

$$g_n(\tau) = F_n[\kappa_2^x(0, \tau), \kappa_3^x(0, \tau, \tau), \kappa_3^x(0, 0, \tau), \dots, \kappa_{p+q}^x(0^{[p]}, \tau^{[q]}), \dots].$$

Таким образом ($n \geq 1$),

$$\frac{\partial^n B_y[\tau]}{(\partial B_x[\tau])^n} = F_n[B_x[\tau], \kappa_3^x(0, \tau, \tau), \dots, \kappa_{p+q}^x(0^{[p]}, \tau^{[q]}), \dots]. \quad (14.4.3)$$

Вычисляя правую часть этого уравнения при $B_x[\tau] \equiv 0$ и обозначая

$$F_n[0, \kappa_3^x(0, \tau, \tau), \dots, \kappa_{p+q}^x(0^{[p]}, \tau^{[q]}), \dots] \equiv g_n^0(\tau), \quad (14.4.4)$$

с помощью (14.4.3) для $B_y[\tau]$ нетрудно записать следующий степенной ряд по $B_x[\tau]$:

$$\begin{aligned} B_y[\tau] &= g_0^0(\tau) + g_1^0(\tau) B_x[\tau] + \frac{1}{2!} g_2^0(\tau) B_x^2[\tau] + \dots + \\ &+ \frac{1}{s!} g_s^0(\tau) B_x^s[\tau] + \dots = g_0^0(\tau) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle f^{(k)}(x) f^{(k)}(x_\tau) \rangle_{B_x=0} B_x^k[\tau]. \end{aligned} \quad (14.4.5)$$

Первое слагаемое, не зависящее от $B_x[\tau]$, определяется из начального условия

$$g_0^0(\tau) \equiv [B_y[\tau]]_{B_x=0} = [K_y[\tau]]_{B_x=0} - \langle y \rangle^2.$$

Таково в общем случае разложение $B_y[\tau]$ по $B_x[\tau]$. Его коэффициенты определяются при условии некоррелированности x и x_τ и зависят в общем случае от всех входных кумулянтных функций, начиная с третьего порядка. Вместе с этим, если функция $f(x)$ есть полином, то разложение (14.4.5) содержит конечное число членов.

3. Ряд (14.4.5) может быть практически удобен и тогда, когда $B_y[\tau]$ вычисляется при таких τ , для которых $B_x[\tau]$ становится настолько малой величиной, что высшими степенями ковариационной функции можно пренебречь и опять же ограничиться конечным числом членов ряда. Если при больших значениях τ мала не только корреляционная связь между x и x_τ , но малы и высшие статистические связи, то $g_k^0(\tau)$ перестают зависеть от τ , становясь примерно рав-

ными $g_k^0(\tau) \approx \langle f^{(k)}(x) \rangle^2$, и для таких больших τ можно приближенно считать, что

$$B_y[\tau] \approx g_0^0(\tau) + \langle f'(x) \rangle^2 B_x[\tau].$$

При этом следует иметь в виду, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} g_0^0(\tau) = 0$.

14.5. Примеры нелинейного преобразования негауссовых процессов

1. Используем теперь полученные в предыдущем параграфе формулы для нахождения корреляционных и ковариационных функций выходных переменных некоторых конкретных нелинейных преобразований при произвольном вероятностном распределении на входе.

Простейшим нелинейным преобразованием является квадратичное преобразование $y(t) = Ax^2(t)$, с которого мы и начнем, поставив задачу отыскания ковариационной функции $\kappa_2^y(t_1, t_2) = B_y[t_1, t_2]$.

Для решения этой задачи воспользуемся формулой (14.3.6), где положим $f(x) = Ax^2$. Правая часть (14.3.6) будет отлична от нуля для $pn, qn = 1, 2$ и равна нулю для $pn, qn > 2$, поэтому зависимости $B_y[t_1, t_2]$ от кумулянтных функций входа соответствует $p = q = 1$ при $n = 2$ и $p, q = 1, 2$ для $n = 1$.

Тогда кумулянтные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_y[t_1, t_2]}{(\partial B_x[t_1, t_2])^2} &= \frac{A^2}{(1! 1!)^2} \left\langle \frac{d^2}{du^2} u^2 \frac{d^2}{dv^2} v^2 \right\rangle = 4A^2, \\ \frac{\partial B_y[t_1, t_2]}{\partial \kappa_4^x(t_1^{[2]}, t_2^{[2]})} &= \frac{1}{2! 2!} \langle 4A^2 \rangle = A^2, \\ \frac{\partial B_y[t_1, t_2]}{\partial B_x[t_1, t_2]} &= \frac{1}{1! 1!} \langle 2Ax(t_1) 2Ax(t_2) \rangle = 4A^2 [B_x[t_1, t_2] + \\ &+ m_x(t_1) m_x(t_2)], \\ \frac{\partial B_y[t_1, t_2]}{\partial \kappa_3^x(t_1, t_2^{[2]})} &= \frac{1}{1! 2!} \langle 2Ax(t_1) 2A \rangle = 2A^2 m_x(t_1), \\ \frac{\partial B_y[t_1, t_2]}{\partial \kappa_3^x(t_1^{[2]}, t_2)} &= \frac{1}{2! 1!} \langle 2A 2Ax(t_2) \rangle = 2A^2 m_x(t_2). \end{aligned}$$

Учитывая, что $B_y[t_1, t_2]$ должна обращаться в нуль при равенстве нулю кумулянтных функций входа, из полученных уравнений элементарно находим

$$\begin{aligned} B_y[t_1, t_2] &= A^2 \{ \kappa_4^x(t_1, t_1, t_2, t_2) + 2m_x(t_1) \kappa_3^x(t_1, t_2, t_2) + \\ &+ 2m_x(t_2) \kappa_3^x(t_1, t_1, t_2) + 4m_x(t_1) m_x(t_2) B_x[t_1, t_2] + \\ &+ 2B_x^2[t_1, t_2] \}. \end{aligned} \quad (14.5.1)$$

Такова ковариационная функция выхода квадратичного преобразования при произвольном случайном процессе на входе. Она определяется не только ковариационной функцией входа, но и в существенной степени высшими кумулянтными функциями, а именно, функциями третьего и четвертого порядка. Таким образом, знание высших кумулянтных функций становится необходимым для нахождения выходной ковариационной функции. Вместе с этим, если у различных негауссовых входных процессов первые четыре кумулянтные функции совпадают, в то время как все остальные различны, совпадать будут и выходные ковариационные функции.

Чтобы записать теперь корреляционную функцию, нужно к правой части (14.5.1) прибавить слагаемое

$$m_y(t_1) m_y(t_2) = A^2 \{D_x(t_1) D_x(t_2) + D_x(t_1) m_x^2(t_2) + D_x(t_2) m_x^2(t_1) + m_x^2(t_1) m_x^2(t_2)\}.$$

Следовательно,

$$K_y[t_1, t_2] = A^2 \{\kappa_4^x(t_1, t_1, t_2, t_2) + 2m_x(t_1) \kappa_3^x(t_1, t_2, t_2) + 2m_x(t_2) \kappa_3^x(t_1, t_1, t_2) + 4m_x(t_1) m_x(t_2) B_x[t_1, t_2] + 2B_x^2[t_1, t_2] + D_x(t_1) D_x(t_2) + m_x^2(t_1) D_x(t_2) + m_x^2(t_2) D_x(t_1) + m_x^2(t_1) m_x^2(t_2)\}. \quad (14.5.2)$$

Заметим, что это выражение для корреляционной функции может быть получено и с помощью третьей формулы (2.2.2), в которой следует положить $1=2=\sqrt{A} x(t_1)$, $3=4=\sqrt{A} x(t_2)$ и затем воспользоваться вторым свойством кумулянтных скобок.

Если входной процесс является стационарным, то

$$B_y[\tau] = A^2 \{\kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) + 2m_x[\kappa_3^x(0, 0, \tau) + \kappa_3^x(0, \tau, \tau)] + 4m_x^2 B_x[\tau] + 2B_x^2[\tau]\}. \quad (14.5.3)$$

Корреляционная функция соответственно равна

$$K_y[\tau] = A^2 \{\kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) + 2m_x[\kappa_3^x(0, 0, \tau) + \kappa_3^x(0, \tau, \tau)] + 4m_x^2 B_x[\tau] + 2B_x^2[\tau] + D_x^2 + 2m_x^2 D_x + m_x^4\}. \quad (14.5.4)$$

Если входной процесс к тому же гауссов, то (14.5.3) принимает широко известный вид:

$$B_y[\tau] = A^2 \{2B_x^2[\tau] + 4m_x^2 B_x[\tau]\}. \quad (14.5.5)$$

Однако эта формула справедлива не только для гауссова процесса $x(t)$. Если негауссов процесс $x(t)$ таков, что его третьи и четвертые кумулянтные функции тождественно равны нулю, в то время как кумулянтные функции более высоких порядков отличны от нуля, то, как следует из (14.5.3), мы по-прежнему будем иметь (14.5.5).

2. Пусть на вход квадратичного детектора поступает негауссов случайный процесс $x(t)$, подвергнутый инерционному линейному преобразованию

$$dx/dt + ax = \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный дельта-процесс с кумулянтными функциями ($\langle \xi \rangle = m_\xi$)

$$\kappa_s^{\xi}(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \mathcal{D}_s \delta(\tau_2) \delta(\tau_3) \cdot \dots \cdot \delta(\tau_s).$$

Учитывая, что кумулянтные функции стационарного процесса $x(t)$ заданы выражениями (12.3.6)—(12.3.8), на основании (14.5.3) найдем следующее значение ковариационной функции на выходе детектора ($m_x = m_\xi/a$):

$$B_y[\tau] = A^2 \left[\frac{\mathcal{D}_4}{4a} + \frac{2m_\xi^2 \mathcal{D}_3}{3a^2} + \frac{\mathcal{D}_2^2}{2a^2} \right] e^{-2a|\tau|} + A^2 \left[\frac{2m_\xi \mathcal{D}_3}{3a^2} + \frac{4m_\xi^2 \mathcal{D}_2}{2a^3} \right] e^{-a|\tau|}.$$

3. Рассмотрим теперь квадратичное детектирование пуассоновского телеграфного сигнала, принимающего равновероятно значения $\pm h$ и имеющего в среднем n_0 перемен знака в единицу времени. Этот случайный процесс имеет симметричное распределение, и его кумулянтные функции второго и четвертого порядка даются формулами [см. (7.4.9), (7.4.11)]

$$B_x[\tau] = h^2 e^{-2n_0|\tau|}, \quad \kappa_4(0, 0, \tau, \tau) = -2h^4 e^{-4n_0|\tau|}.$$

Согласно (14.5.3) ковариационная функция на выходе равна

$$B_y[\tau] = A^2 \{ -2h^4 e^{-4n_0|\tau|} + 2h^4 e^{-4n_0|\tau|} \} \equiv 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае на выходе квадратичного преобразователя никакого случайного процесса нет вообще, поскольку только в этом случае ковариационная функция тождественно равна нулю. Полученный результат очевиден, поскольку в данном случае на выходе квадратичного детектора присутствует только постоянная составляющая — «постоянный ток».

Как следует из (14.5.3) и (14.5.5), подобная ситуация, в которой происходит своеобразная «компенсация» кумулянтных функций, может иметь место только для негауссова $x(t)$. При гауссовом входе на выходе квадратичного детектора всегда будет присутствовать шум.

4. Пусть нелинейное преобразование стационарного процесса $x(t) \rightarrow y(t)$ определяется законом $y(t) = e^{\beta x(t)}$. Найдем корреляционную функцию выходного процесса $K_y[\tau] = \langle e^{\beta[x+x\tau]} \rangle$.

На основании (14.3.7)

$$\frac{\partial K_y[\tau]}{\partial \kappa_{p,q}^{x,x\tau}} = \frac{1}{p! q!} \left\langle \frac{d^p}{dx^p} e^{\beta x} \frac{d^q}{dx_\tau^q} e^{\beta x\tau} \right\rangle = \frac{\beta^{p+q}}{p! q!} K_y[\tau].$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$K_y[\tau] = \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta^s}{s!} \sum_{\lambda=0}^s C_s^\lambda \kappa_s^\lambda(0^{[s-\lambda]}, \tau^{[\lambda]}) \right\}. \quad (14.5.6)$$

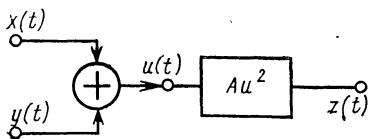


Рис. 14.2.

Отсюда следует, что $K_y[\tau]$ зависит, во-первых, от всех кумулянтных функций входа и, во-вторых, эти кумулянтные функции входят во всех сочетаниях их аргументов. Значит, при таком нелинейном преобразовании выходная корреляционная функция «чувствительна» ко всем кумулянтным функциям входного процесса. Это обстоятельство связано с тем, что преобразование $x \rightarrow e^{\beta x}$ содержит все «степени нелинейности».

Поскольку корреляционная функция любого стационарного случайного процесса является четной функцией τ , постольку четной функцией τ должна быть и правая часть (14.5.6) независимо от взаимоотношения входящих в нее кумулянтных функций различных порядков. Это означает, что четными функциями должны быть все суммы, входящие множителями перед $\beta^s/s!$. Если вспомнить свойства симметрии кумулянтных функций, представленные формулами (7.2.8), (7.2.9), то легко убедиться, что сумма

$$\sum_{\lambda=1}^{s-1} C_s^\lambda \kappa_s^x(0^{[s-\lambda]}, \tau^{[\lambda]}),$$

действительно, есть четная функция τ при любых $s \geq 2$.

5. Рассмотрим следующую задачу. Пусть на входы системы, изображенной на рис. 14.2, подаются два случайных стационарных, в общем случае взаимосвязанных, процесса $x(t)$ и $y(t)$. Требуется найти корреляционную и ковариационную функции выходного случайного процесса $z(t)$. Положим для простоты, что $m_x = m_y = 0$.

Воспользовавшись формулой (14.5.3), сразу же можно записать

$$B_z[\tau] = A^2 \{ \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) + 2B_u^2[\tau] \},$$

где $u = u(t) = x(t) + y(t)$.

Используя (12.5.2), получим

$$\begin{aligned} B_z[\tau] = & A^2 \{ \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) + \kappa_4^y(0, 0, \tau, \tau) + 2B_x^2[\tau] + \\ & + 4B_x[\tau] B_y[\tau] + 2B_y^2[\tau] \} + A^2 \{ 2\kappa_{3,1}^{x,y}(0, 0, \tau; \tau) + \\ & + 2\kappa_{3,1}^{x,y}(\tau, \tau; 0) + 2\kappa_{1,3}^{x,y}(0; 0, \tau, \tau) + 2\kappa_{1,3}^{x,y}(\tau; 0, 0, \tau) + \\ & + \kappa_{2,2}^{x,y}(0, 0; \tau, \tau) + 4\kappa_{2,2}^{x,y}(0, \tau; 0, \tau) + \kappa_{2,2}^{x,y}(\tau, \tau; 0, 0) + \\ & + 2B_{xy}^2[\tau] + 2B_{yx}^2[\tau] + 4B_x[\tau] B_{xy}[\tau] + 4B_x[\tau] B_{yx}[\tau] + \\ & + 4B_{xy}[\tau] B_{yx}[\tau] + 4B_y[\tau] B_{xy}[\tau] + 4B_y[\tau] B_{yx}[\tau] \}. \end{aligned}$$

Слагаемые во второй фигурной скобке обусловлены наличием статистической взаимосвязи входных процессов. Если $x(t)$ и $y(t)$ статистически независимы, то

$$\begin{aligned} B_z[\tau] = & A^2 \{ \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) + \kappa_4^y(0, 0, \tau, \tau) + \\ & + 2B_x^2[\tau] + 4B_x[\tau] B_y[\tau] + 2B_y^2[\tau] \}. \end{aligned}$$

14.6. Гауссов входной шум. Ковариационные ряды

1. В предыдущих параграфах мы рассмотрели статистические характеристики нелинейного безынерционного преобразования случайных процессов, имеющих произвольное вероятностное распределение. Все полученные там результаты существенно упрощаются, а развитые методы становятся более мощными и эффективными, если нелинейному преобразованию подвергается гауссов случайный процесс, обладающий всего лишь двумя отличными от нуля кумулянтными функциями.

В этом параграфе мы рассмотрим закономерности трансформации ковариационных и корреляционных функций гауссовых случайных процессов при их безынерционном нелинейном преобразовании как в общем случае, так и на ряде конкретных примеров.

2. Пусть имеется нелинейное преобразование $y = y(x)$ гауссова стационарного случайного процесса с заданным средним значением m_x и ковариационной функцией $B_x[\tau]$. Общее выражение для ковариационной функции выходного случайного процесса может быть получено из разложения (14.4.5), коэффициенты которого вычисляются теперь наиболее просто. В самом деле, поскольку $g_n^0(\tau)$ находится при условии $B_x[\tau] \equiv 0$, то вследствие статистической независимости x и x_τ ($n \geq 1$)

$$g_n^0(\tau) = \langle y^{(n)}(x) y^{(n)}(x_\tau) \rangle_{B_x=0} = \langle y^{(n)}(x) \rangle^2 = F_n(m_x, D_x).$$

Таким образом, в этом случае коэффициенты разложения не зависят от τ , и оно принимает наиболее простой вид:

$$B_y[\tau] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle y^{(k)}(x) \rangle^2 B_x^k[\tau]. \quad (14.6.1)$$

Для корреляционной функции соответственно имеем

$$K_y[\tau] = \langle y \rangle^2 + \langle y' \rangle^2 B_x[\tau] + \frac{1}{2!} \langle y'' \rangle^2 B_x^2[\tau] + \dots + \frac{1}{s!} \langle y^{(s)} \rangle^2 B_x^s[\tau] + \dots \quad (14.6.2)$$

Будем называть ряды (14.6.1), (14.6.2) *ковариационными рядами*.

Если взаимосвязь между $B_y[\tau]$, $K_y[\tau]$ и $B_x[\tau]$ записывать в виде дифференциальных уравнений, то, согласно (14.4.1), (14.4.2), мы получим те же самые уравнения, начальные условия для которых теперь весьма просты:

$$\frac{d^n K_y[\tau]}{dB_x^n[\tau]} = \langle y^{(n)}(x) y^{(n)}(x_\tau) \rangle, \quad \left. \frac{d^n K_y}{dB_x^n} \right|_{B_x=0} = \langle y^{(n)}(x) \rangle^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n B_y [\tau]}{dB_x^n [\tau]} &= \langle y^{(n)}(x) y^{(n)}(x_\tau) \rangle, \quad \left. \frac{d^n B_y}{dB_x^n} \right|_{B_x=0} = \\ &= \langle y^{(n)}(x) \rangle^2. \end{aligned} \quad (14.6.3)$$

В формулах для $B_y[\tau]$ порядок производной $n > 0$, в то время как в формулах для $K_y[\tau]$ он может принимать и нулевое значение.

При решении конкретных задач можно с одинаковым успехом пользоваться как ковариационными рядами, так и дифференциальными уравнениями (14.6.3).

Мы уже указывали на то, что уравнения (14.6.3) справедливы не только для гауссова процесса $x(t)$. Однако в этом случае вычисление их правых частей, как и начальных условий, нетривиально, и необходимо пользоваться формулами размыкания моментных скобок. Если же $x(t)$ есть гауссов процесс, то оперирование с этими уравнениями упрощается и они позволяют находить выходные корреляционные функции для целого ряда нелинейных преобразований достаточно просто [47—49, 62].

Проиллюстрируем теперь использование полученных соотношений для ряда конкретных нелинейных преобразований.

Полиномиальная нелинейность. Пусть нелинейное преобразование $x \rightarrow y$ имеет вид

$$y = y(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n. \quad (14.6.4)$$

Поскольку у функции $y(x)$ отличны от нуля только первые n производных, то вычисление $B_y[\tau]$ удобнее выполнять с помощью ковариационных рядов. Имеем

$$\begin{aligned} \langle y \rangle &= A_0 + A_1 \langle x \rangle + A_2 \langle x^2 \rangle + \dots + A_n \langle x^n \rangle \equiv \\ &\equiv h_0(m_x, D_x), \end{aligned}$$

$$\langle y' \rangle = A_1 + 2A_2 \langle x \rangle + 3A_3 \langle x^2 \rangle + \dots + nA_n \langle x^{n-1} \rangle \equiv h_1(m_x, D_x),$$

$$\langle y'' \rangle = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3 \langle x \rangle + \dots + \\ + n(n-1) A_n \langle x^{n-2} \rangle \equiv h_2(m_x, D_x),$$

$$\langle y^{(n)} \rangle = n! A_n \equiv h_n.$$

Следовательно, ряд для $B_y[\tau]$ согласно (14.6.1), (14.6.2) содержит n членов, а ряд $K_y[\tau]$ имеет $(n + 1)$ член:

$$K_y[\tau] = h_0^2 + B_y[\tau] = h_0^2 + h_1^2 B_x[\tau] + \frac{h_2^2}{2!} B_x^2[\tau] + \dots + \frac{h_n^2}{n!} B_x^n[\tau]. \quad (14.6.5)$$

Реальный квадратичный детектор. Всякая характеристика реального детектора около любой рабочей точки всегда может быть

представлена в виде степенного ряда (14.6.4). Если область рабочих напряжений невелика, то можно ограничиться лишь квадратичным членом — первым членом, отвечающим собственно за эффект детектирования:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2.$$

В этом случае из (14.6.5) получаем

$$\begin{aligned} K_y [\tau] &= h_0^2 + B_y [\tau] = h_0^2 + h_1^2 B_x [\tau] + 0,5 h_2^2 B_x^2 [\tau] = \\ &= [A_0 + A_1 m_x + A_2 D_x + A_2 m_x^2]^2 + \\ &+ [A_1 + 2A_2 m_x]^2 B_x [\tau] + 2A_2^2 B_x^2 [\tau]. \end{aligned}$$

Таким образом, в общем случае квадратичного преобразования ковариационная функция выхода содержит не только слагаемое, пропорциональное $B_x^2 [\tau]$, что характерно, собственно, для квадратичного детектирования, но и член, пропорциональный $B_x [\tau]$ и обусловленный линейным членом в $y(t)$, а также несимметрией входного вероятностного распределения по отношению к точке $x = 0$.

Экспоненциальный детектор. Характеристика этого детектора записывается в виде

$$y = y(x) = y_0 e^{bx}.$$

Не представляет никакого труда найти среднее значение функции и ее производных:

$$\begin{aligned} \langle y \rangle &= y_0 \exp \left\{ \frac{b^2}{2} D_x + b m_x \right\}, \\ \langle y' \rangle &= b \langle y \rangle, \dots, \langle y^{(n)} \rangle = b^n \langle y \rangle. \end{aligned}$$

Тогда согласно (14.6.2)

$$\begin{aligned} K_y [\tau] &= \langle y \rangle^2 \left[1 + b^2 B_x [\tau] + \frac{b^4}{2!} B_x^2 [\tau] + \right. \\ &\left. + \dots + \frac{b^{2s}}{s!} B_x^s [\tau] + \dots \right]. \end{aligned}$$

Суммируя этот ряд, находим

$$\begin{aligned} K_y [\tau] &= \langle y \rangle^2 \exp (b^2 B_x [\tau]), \\ B_y [\tau] &= \langle y \rangle^2 [\exp (b^2 B_x [\tau]) - 1]. \end{aligned}$$

Линейный детектор. Пусть на входе линейного детектора, для которого

$$y = y(x) = \begin{cases} kx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

действует симметрично распределенный ($m_x = 0$) гауссов шум. Имеем

$$\begin{aligned} y' (x) &= k 1 (x), \quad y'' (x) = k \delta (x), \quad y''' (x) = k \delta' (x), \dots, y^n (x) = \\ &= k \delta^{(n-2)} (x). \end{aligned}$$

Вычисляя средние значения с помощью (4.6.8), (I.4), найдем

$$\langle y(x) \rangle = k \sqrt{\frac{D_x}{2\pi}}, \quad \langle y'(x) \rangle = \frac{k}{2},$$

$$\langle y''(x) \rangle = \frac{k}{\sqrt{2\pi D_x}}, \dots,$$

$$\langle y^{(2n)}(x) \rangle = k \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{D_x^{n-1} \sqrt{2\pi D_x}},$$

$$\langle y'''(x) \rangle = \langle y^{(5)}(x) \rangle = \dots = \langle y^{(2n+1)}(x) \rangle = 0.$$

Таким образом, на основании (14.6.2) получаем следующий ряд для корреляционной функции:

$$K_y[\tau] = \frac{k^2 D_x}{2\pi} + \frac{k^2}{4} B_x[\tau] + \frac{k^2}{4\pi D_x} B_x^2[\tau] + \\ + \frac{k^2}{2\pi D_x^3 4!} B_x^4[\tau] + \dots + \frac{k^2 [(2n-3)!!]^2}{2\pi D_x^{2n-1} (2n)!} B_x^{2n}[\tau] + \dots \quad (14.6.6)$$

Трудно сразу догадаться, чему равна сумма этого ряда. Тем не менее эту сумму можно найти, если отыскивать зависимость $K_y[\tau]$ от $B_x[\tau]$ с помощью первого дифференциального уравнения (14.6.3), которое всего удобнее записать для значения $n=2$. В этом случае в правой части уравнения мы получим среднее значение от произведения дельта-функций, которое легко вычисляется с помощью (I.5):

$$d^2 K_y / dB_x^2 = \langle y''(x) y''(x_\tau) \rangle = k^2 \langle \delta(x) \delta(x_\tau) \rangle = \\ = k^2 / 2\pi \sqrt{D_x^2 - B_x^2}.$$

Начальные условия таковы:

$$K_y|_{B_x=0} = \langle y(x) \rangle^2 = \frac{k^2 D_x}{2\pi}, \quad \frac{dK_y}{dB_x} \Big|_{B_x=0} = \\ = \langle y'(x) \rangle^2 = \frac{k^2}{4}.$$

Решение полученного дифференциального уравнения при указанных начальных условиях имеет вид

$$K_y[\tau] = \frac{k^2}{2\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{B_x[\tau]}{D_x} \right] B_x[\tau] + \sqrt{D_x^2 - B_x^2[\tau]} \right\}. \quad (14.6.7)$$

Это выражение и является, как нетрудно проверить, суммой ряда (14.6.6).

Сильный ограничитель. Пусть нелинейная безынерционная система описывается характеристикой (рис. 14.3)

$$y = y(x) = \begin{cases} h, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -h, & x < 0 \end{cases}.$$

Средние значения производных этой функции при симметричном гауссовом распределении $x(t)$ равны

$$\begin{aligned} \langle y^{2n}(x) \rangle &= 2h \langle \delta^{(2n-1)}(x) \rangle = 0, \\ \langle y^{2n+1}(x) \rangle &= 2h \langle \delta^{(2n)}(x) \rangle = 2h \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{D_x^n \sqrt{2\pi D_x}}. \end{aligned}$$

Таким образом, корреляционный ряд (14.6.2) содержит, как это и должно быть из-за симметричности характеристики ограничителя, только нечетные степени $B_x[\tau]$:

$$\begin{aligned} K_y[\tau] &= \frac{2h^2}{\pi} \left[\frac{B_x[\tau]}{D_x} + \frac{1}{3!} \frac{B_x^3[\tau]}{D_x^3} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n+1)! D_x^{2n+1}} B_x^{2n+1}[\tau] + \dots \right]. \end{aligned} \quad (14.6.8)$$

Не представляет труда найти сумму этого ряда с помощью первого дифференциального уравнения (14.6.3). Полагая $n = 1$, имеем

$$\frac{dK_y}{dB_x} = 4h^2 \langle \delta(x) \delta(x_\tau) \rangle = \frac{4h^2}{2\pi \sqrt{D_x^2 - B_x^2}}$$

при начальном условии $K_y = 0$ при $B_x = 0$. Решая это уравнение, находим сумму ряда (14.6.8):

$$K_y[\tau] = \frac{2h^2}{\pi} \arcsin \frac{B_x[\tau]}{D_x}. \quad (14.6.9)$$

Такова корреляционная функция гауссова случайного процесса, прошедшего через сильный ограничитель.

Выходной случайный процесс может принимать только два равновероятных значения: $+h$ и $-h$. Таким образом, этот случайный процесс является ничем иным, как телеграфным сигналом (см. рис. 7.5). Моменты перехода от одного значения к другому определяются моментами перехода гауссова симметричного шума через нуль. Очевидно, что частота перехода процесса $x(t)$ через нуль определяется его функцией ковариации $B_x[\tau]$, и именно поэтому корреляционные характеристики выхода существенно зависят от $B_x[\tau]$, что и отражено формулой (14.6.9).

Из этой же формулы следует, что телеграфный сигнал может иметь практически любую корреляционную функцию, ибо по заданной $K_y[\tau]$ на основании (14.6.9) всегда можно построить ковариационную функцию порождающего гауссова процесса как

$$B_x[\tau] = D_x \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{K_y[\tau]}{D_y} \right).$$

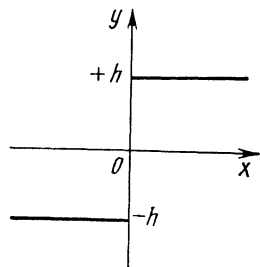


Рис. 14.3.

Слабый ограничитель. Характеристика такого ограничителя записывается в виде

$$y = y(x) = \begin{cases} h, & x > x_0 \\ \frac{h}{x_0} x, & -x_0 \leq x \leq x_0 \\ -h, & x < -x_0 \end{cases}$$

Вследствие нечетности функции $y(x)$ отличными от нуля при симметричном гауссовом входе будут средние значения только нечетных производных, и для первых двух из них можно найти

$$\langle y'(x) \rangle = \frac{h}{x_0} \Psi(x_0), \quad \langle y'''(x) \rangle = -\frac{2h}{D_x} W_r(x_0),$$

где

$$W_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \exp\left(-\frac{x^2}{2D_x}\right), \quad \Psi(x) = \int_{-x}^x W_r(u) du.$$

Тогда первые члены ковариационного ряда (14.6.2) имеют вид

$$K_y[\tau] = \frac{h^2}{x_0^2} \Psi^2(x_0) B_x[\tau] + \frac{4h^2}{3! D_x^2} W_r^2(x_0) B_x^2[\tau] + \dots \quad (14.6.10)$$

Сумму этого ряда найти не удастся. Характерным параметром слабого ограничителя является x_0 , определяющий зону линейности. Отношение этого параметра к $\sqrt{D_x}$ существенно влияет на вид преобразованного шума.

Если $x_0 \gg \sqrt{D_x}$, то подавляющее большинство значений, принимаемых входным шумом, лежит в линейной области характеристики, и наличие ограничителя практически никак не сказывается на выходном шуме. По этой причине

$$K_y[\tau] = h^2 x_0^{-2} B_x[\tau],$$

как и следует из (14.6.10), ибо при $x_0 \gg \sqrt{D_x}$ функция $\Psi(x_0) \simeq 1$, а плотность вероятности $W_r(x_0)$ пренебрежимо мала.

Когда имеется обратная ситуация $x_0 \ll \sqrt{D_x}$, зона линейности ограничителя слабо сказывается на характеристиках выходной переменной, ибо время пребывания $x(t)$ в этой зоне весьма мало. В этом случае слабый ограничитель фактически переходит в сильный, и согласно (14.6.8) первые два члена ряда должны иметь вид

$$K_y[\tau] = \frac{2h^2}{\pi} \left[\frac{B_x[\tau]}{D_x} + \frac{1}{3!} \frac{B_x^3[\tau]}{D_x^3} + \dots \right].$$

Нетрудно проверить, что именно к этому и сводится ряд (14.6.10), ибо при $x_0 \ll \sqrt{D_x}$

$$\Psi(x_0) \simeq \frac{2x_0}{\sqrt{2\pi D_x}}, \quad W_r(x_0) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}}.$$

3. Вышеприведенные примеры показывают, что ковариационный ряд (14.6.2) можно использовать для приближенного определения $K_y[\tau]$, если его сумма неизвестна и если этот ряд можно оборвать на каком-либо члене. Последнее всегда можно сделать, если функция $B_x[\tau]$ достаточно мала, что, в свою очередь, имеет место при больших значениях τ . Итак, первые члены ковариационных рядов (14.6.1), (14.6.2) дают возможность получить приближенное значение $B_y[\tau]$ или $K_y[\tau]$ при достаточно больших τ . Нетрудно понять, что τ должно быть большим в сравнении с τ_0 — с временем корреляции входного случайного процесса.

Следовательно, при произвольном нелинейном безынерционном преобразовании $y = y(x)$ при $\tau \gg \tau_0$ корреляционная функция выхода имеет приближенное значение

$$K_y[\tau] = \langle y(x) \rangle^2 + \langle y'(x) \rangle^2 B_x[\tau].$$

4. Вместе с этим может возникнуть задача нахождения значения $K_y[\tau]$ при τ малых в сравнении с τ_0 . В этом случае на основании (14.6.3) может быть построен видоизмененный ковариационный ряд, выражающий $K_y[\tau]$ через степени $B_x[0] - B_x[\tau] = D_x - B_x[\tau]$, первые члены которого и дадут значение $K_y[\tau]$ при малых τ . Так как

$$\left\langle \frac{d^n y(x)}{dx^n} \frac{d^n y(x_\tau)}{dx_\tau^n} \right\rangle \Big|_{\tau=0, B_x[\tau]=D_x} = \left\langle \left[\frac{d^n y(x)}{dx^n} \right] \right\rangle,$$

то мы сразу же можем записать следующее выражение для видоизмененного ковариационного ряда [63]:

$$\begin{aligned} K_y[\tau] = & \langle y^2(x) \rangle - \langle [y'(x)]^2 \rangle [B_x[0] - B_x[\tau]] + \\ & + \frac{1}{2!} \langle [y''(x)]^2 \rangle [B_x[0] - B_x[\tau]]^2 + \dots + \\ & + \frac{(-1)^s}{s!} \langle [y^{(s)}(x)]^2 \rangle [B_x[0] - B_x[\tau]]^s + \dots \end{aligned} \quad (14.6.11)$$

Нетрудно убедиться, что оба ковариационных ряда (14.6.2) и (14.6.11) фактически эквивалентны, поскольку представляют степенные ряды одной и той же функции, взятые лишь в окрестностях различных точек: первый ряд в окрестности $B_x = 0$, второй — в окрестности $B_x = D_x$.

Ограничиваясь первыми членами, имеем, таким образом, для τ малых в сравнении с τ_0 :

$$K_y[\tau] = \langle y^2(x) \rangle - \langle [y'(x)]^2 \rangle D_x + \langle [y'(x)]^2 \rangle B_x[\tau]. \quad (14.6.12)$$

14.7. Преобразование спектров негауссовых процессов

1. Известно, что безынерционные нелинейные системы могут различным образом изменять спектр негауссова случайного процесса. В настоящем параграфе мы ставим задачу найти общие закономерности и особенности трансформации спектра и на сравнительно простых примерах выявить и проанализировать причины указанного разнообразия. При этом мы ограничимся рассмотрением только спектра второго порядка, т. е. спектра мощности случайного процесса.

Пусть имеется стационарный входной процесс $x(t)$. Спектр мощности выходного также стационарного случайного процесса равен

$$S_y(\omega) = \mathcal{F}_c \{K_y[\tau]; \omega\tau\} = \mathcal{F}_c \{B_y[\tau]; \omega\tau\} + m_y^2 \delta(\omega) = G_y(\omega) + m_y^2 \delta(\omega).$$

В случае произвольного вероятностного распределения $x(t)$ ковариационная функция выхода дается рядом (14.4.5). Переходя в левой и правой частях к корреляционным функциям

$$K_y[\tau] = B_y[\tau] + \langle f(x) \rangle^2, \quad K_x[\tau] = B_x[\tau] + m_x^2.$$

вместо (14.4.5) получим ряд

$$K_y[\tau] = H_0(\tau) + H_1(\tau) K_x[\tau] + \frac{1}{2!} H_2(\tau) K_x^2[\tau] + \dots + \frac{1}{s!} H_s(\tau) K_x^s[\tau] + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} H_0(\tau) &= g_0^0(\tau) - g_1^0(\tau) m_x^2 + g_2^0(\tau) m_x^4 - g_3^0(\tau) m_x^6 + \dots, \\ H_1(\tau) &= g_1^0(\tau) - 2g_2^0(\tau) m_x^2 + 3g_3^0(\tau) m_x^4 - \dots, \\ H_2(\tau) &= g_2^0(\tau) - 3g_3^0(\tau) m_x^2 + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_y(\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \mathcal{F}_c \{H_s(\tau) K_x^s[\tau]; \omega\tau\}. \quad (14.7.1)$$

Учтем теперь, что согласно (14.4.4) функции $g_n^0(\tau)$, а следовательно, и $H_n(\tau)$ зависят от всех двумоментных кумулянтных функций входного процесса, исключая $B_x[\tau]$:

$$H_n(\tau) = H_n[\kappa_p^{\tau} + q(0[p], \tau[q])].$$

Это значит, что спектр выхода $S_y(\omega)$ при произвольном вероятностном распределении $x(t)$ не определяется только спектром входного процесса $S_x(\omega)$, а в существенной степени зависит и от его

высших кумулянтных функций (вернее, от преобразований Фурье их комбинаций). Если ввести обозначение

$$\hat{H}_s(\omega) \equiv \mathcal{F}_c \{H_s(\tau); \omega\tau\}$$

и воспользоваться операцией свертки $\otimes$, то ряд (14.7.1) может быть записан в виде

$$S_y(\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \hat{H}_s(\omega) [\otimes S_x(\omega)]^s. \quad (14.7.2)$$

Таким образом, вклад в $S_y(\omega)$ дают все спектры высших порядков

$$G_{p,q}^x(\omega) = \mathcal{F} \{x_{p+q}^x(0|p], \tau|q]; -\omega\tau\}, \quad (14.7.3)$$

которые входят в спектральные функции $\hat{H}_s(\omega)$.

При одном и том же $S_x(\omega)$ и одном и том же нелинейном преобразовании выходной спектр $S_y(\omega)$ будет различным, если различными являются спектры $G_{p,q}^x(\omega)$, т. е. если имеется «различная негауссовость» входного случайного процесса. Можно сказать, что спектр мощности выхода нелинейного преобразования служит своего рода «индикатором» входного вероятностного распределения. Это обстоятельство связано именно с нелинейными преобразованиями, ибо при линейных преобразованиях спектр мощности выхода определяется лишь спектром мощности входа и характеристиками системы.

2. Проведем теперь более подробное исследование некоторых простейших примеров нелинейного преобразования. Прежде всего рассмотрим квадратичное преобразование

$$y = Ax^2(t),$$

выходная корреляционная функция которого дается формулой (14.5.4)

$$K_y[\tau] = A^2 \{x_4^x(0, 0, \tau, \tau) + 2m_x[x_3^x(0, 0, \tau) + x_3^x(0, \tau, \tau)] + 2B_x^2[\tau] + 4m_x^2B_x[\tau]\} + m_y^2,$$

где $m_y = A(D_x + m_x^2)$. Совершая косинус-преобразование Фурье левой и правой части этого выражения с учетом (14.7.3), найдем следующее значение выходной спектральной плотности:

$$S_y(\omega) = A^2 \{G_{2,2}^x(\omega) + 2m_x[G_{2,1}^x(\omega) + G_{1,2}^x(\omega)] + 2G_x(\omega) \otimes G_x(\omega) + 4m_x^2G_x(\omega)\} + m_y^2\delta(\omega). \quad (14.7.4)$$

Такова структура спектра после квадратичного преобразования при произвольном вероятностном распределении на входе. Этот спектр определяется спектром мощности входа, а также входными спектрами третьего и четвертого порядков. При этом входные спектры более высоких порядков не дают вклада в выходной спектр. Это значит, что если имеются различные негауссовы случайные процессы, для которых спектры второго, третьего и четвертого по-

рядка одинаковы, а спектры более высоких порядков различны, то только по выходному спектру мощности эти процессы мы отличить друг от друга не сможем. Легко при этом понять, что отличие проявится лишь в выходных спектрах третьего, четвертого и т. д. порядков. Таким образом, для нахождения спектра на выходе квадратичного детектора при произвольном вероятностном распределении входа само это вероятностное распределение, характеризующее полным набором кумулянтных функций, знать не нужно.

Подобная ситуация, однако, наблюдается лишь для нелинейных преобразований полиномиального типа, а во многих других случаях приходится задаваться полным набором кумулянтных функций или, что то же самое, полным набором спектров высших порядков. В самом деле, для нелинейного преобразования $x \rightarrow y = e^{\beta x}$, рассмотренного в § 14.5 п. 4, корреляционная функция выходной переменной согласно (14.5.6) зависит от всех кумулянтных функций $\kappa_{p+q}^x(0^{[p]}, \tau^{[q]})$. Это значит, что спектральная плотность $S_y(\omega)$ также будет зависеть от всех спектров $G_{p,q}^x(\omega)$ и их всевозможных сверток.

3. Вернемся к квадратичному детектору и рассмотрим ряд конкретных примеров входного процесса $x(t)$. Предположим для простоты, что $\langle x(t) \rangle = 0$, и не будем обращать внимание на постоянную составляющую выходного процесса, анализируя лишь $G_y(\omega)$. В этом случае спектральная плотность выходных флуктуаций, согласно (14.7.4), будет равна

$$G_y(\omega) = A^2 \{G_{2,2}^x(\omega) + 2G_x(\omega) \otimes G_x(\omega)\}. \quad (14.7.5)$$

Детектирование пуассоновского случайного процесса. Пусть имеется стационарный пуассоновский случайный процесс с заданной формой элементарного импульса $F(t)$ и со средней частотой импульсов в единицу времени, равной n_0 . Пусть случайная величина a обладает симметричным вероятностным распределением. Согласно (7.4.8) кумулянтные функции рассматриваемого пуассоновского процесса равны

$$\kappa_s^x(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \langle a^s \rangle n_0 \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F(u + \tau_2) \cdot \dots \cdot \times \\ \times F(u + \tau_s) du.$$

Следовательно,

$$\kappa_2^x(0, \tau) = B_x[\tau] = \langle a^2 \rangle n_0 \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F(u + \tau) du, \\ \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) = \langle a^4 \rangle n_0 \int_{-\infty}^{\infty} F^2(u) F^2(u + \tau) du.$$

Приняв во внимание, что входящие сюда интегралы представляют собой функции корреляции первого рода (см. § 11.2) элемен-

тарного импульса и его квадрата

$$\Psi_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F(u + \tau) du, \quad \Psi_{F^2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(u) F^2(u + \tau) du,$$

запишем кумулянтные функции как

$$\kappa_2^x(0, \tau) = \langle a^2 \rangle n_0 \Psi_F(\tau), \quad \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) = \langle a^4 \rangle n_0 \Psi_{F^2}(\tau).$$

Сопряженные Фурье этих функций равны

$$G_x(\omega) = \langle a^2 \rangle n_0 \mathcal{D}_F(\omega), \quad G_{x^2}(\omega) = \langle a^4 \rangle n_0 \mathcal{D}_{F^2}(\omega),$$

где $\mathcal{D}_u(\omega)$ есть спектр энергии импульса $u(t)$ (см. § 11.2).

Тем самым

$$G_y(\omega) = A^2 \{ \langle a^4 \rangle n_0 \mathcal{D}_{F^2}(\omega) + 2 \langle a^2 \rangle^2 n_0^2 \mathcal{D}_F(\omega) \otimes \mathcal{D}_F(\omega) \}. \quad (14.7.6)$$

Таков спектр флуктуаций «продетектированного» пуассоновского шума. Его первое слагаемое, представляющее негауссовость пуассоновского шума, является положительным. Это значит, что в рассматриваемом примере негауссовость входного шума увеличила на всех частотах спектральную плотность выходного процесса.

Конкретизируем теперь вид элементарного импульса, придав ему прямоугольную форму длительностью T :

$$F(t) = \begin{cases} B, & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}, \quad F^2(t) = \begin{cases} B^2, & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}.$$

В этом случае корреляционные функции импульса равны

$$\Psi_F(\tau) = B^2 T \Delta(\tau/T), \quad \Psi_{F^2}(\tau) = B^4 T \Delta(\tau/T).$$

Здесь $\Delta(x)$ — треугольная функция (7.4.3), сопряженная Фурье которой имеет вид

$$\mathcal{D}^0(\omega) = F_c \left\{ \Delta \left(\frac{\tau}{T} \right); \omega \tau \right\} = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\omega T}{2} \right)^{-2} \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right). \quad (14.7.7)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \kappa_2(0, \tau) &= \langle a^2 \rangle \varepsilon B^2 \Delta(\tau/T), \\ \kappa_4(0, 0, \tau, \tau) &= \langle a^4 \rangle \varepsilon B^4 \Delta(\tau/T), \end{aligned} \quad (14.7.8)$$

а выходной спектр на основании (14.7.6) принимает вид

$$G_y(\omega) = A^2 B^4 \varepsilon \{ \langle a^4 \rangle \mathcal{D}^0(\omega) + 2 \langle a^2 \rangle^2 \varepsilon \mathcal{D}^0(\omega) \otimes \mathcal{D}^0(\omega) \},$$

где $\varepsilon = n_0 T$ — среднее число элементарных импульсов, возникающих на времени, равном длительности одного элементарного импульса. При этом спектр входного процесса равен

$$G_x(\omega) = \langle a^2 \rangle \varepsilon B^2 \mathcal{D}^0(\omega). \quad (14.7.9)$$

Принимая во внимание, что

$$\mathcal{J}^0(\omega) \otimes \mathcal{J}^0(\omega) = \frac{T}{2\pi} \frac{1 - (\sin \omega T / \omega T)}{(\omega T / 2)^2},$$

найдем следующее окончательное выражение для полного спектра мощности выхода идеального квадратичного детектора, на вход которого подан пуассоновский случайный процесс с прямоугольным элементарным импульсом:

$$S_y(\omega) = A^2 B^4 \varepsilon \frac{2}{\pi \omega^2 T} \left\{ \langle a^4 \rangle \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \langle a^2 \rangle^2 \varepsilon \left[1 - \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right] \right\} + A^2 B^4 \varepsilon^2 \langle a^2 \rangle \delta(\omega).$$

На рис. 14.4 изображены спектры мощности на входе и на выходе.

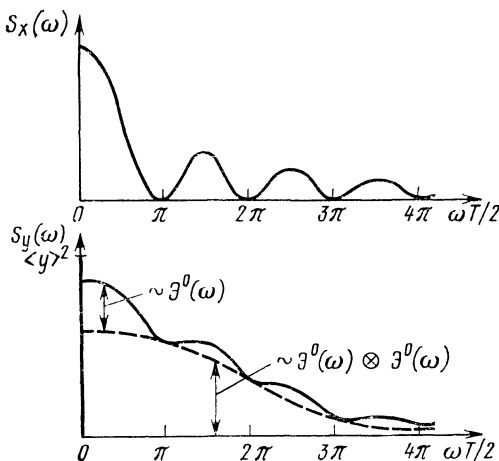


Рис. 14.4.

Детектирование телеграфного сигнала. Рассмотрим симметричный телеграфный сигнал, осциллограмма которого изображена на рис. 7.5. Будем полагать, что значения $\pm h$ принимаются равновероятно, так что $\langle x(t) \rangle = 0$. Как уже отмечалось выше, в § 7.4, перемены знака телеграфного сигнала в общем случае определяются различными статистическими закономерностями, что приводит к различным видам ковариационных функций.

1) Если число перемен знака определяется законом Пуассона со средним числом перемен знака в единицу времени, равным n_0 , то согласно (7.4.9)

$$B_x[\tau] = \kappa_x^x(0, \tau) = h^2 e^{-2n_0 |\tau|}.$$

Спектр мощности такого телеграфного сигнала имеет вид

$$G_x(\omega) = \frac{h^2}{\pi} \frac{2n_0}{4n_0^2 + \omega^2}.$$

2) Если перемены знака происходят в моменты времени, кратные T , то согласно (7.4.10)

$$B_x[\tau] = \kappa_x^x(0, \tau) = h^2 \Delta(\tau/T),$$

так что

$$G_x(\omega) = h^2 \mathfrak{D}^0(\omega), \quad (14.7.10)$$

где $\mathfrak{D}^0(\omega)$ определяется формулой (14.7.7).

3) Если, наконец, перемены знака обуславливаются переходами через нуль вспомогательного гауссова стационарного случайного процесса, обладающего ковариационной функцией $B_\xi[\tau]$, то

$$B_x[\tau] = h^2 \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{B_\xi[\tau]}{B_\xi[0]}.$$

В этом случае спектр $G_x(\omega)$ сложным образом зависит от $G_\xi(\omega)$ и при произвольном спектре $G_\xi(\omega)$ также может быть в достаточной степени произвольным.

Тем самым, телеграфный сигнал может обладать совершенно различными спектрами, и это различие обязано различной «статистике» перемен знака.

Перейдем теперь к детектированию телеграфного сигнала. Как уже отмечалось, в этом случае на выходе идеального квадратичного детектора вообще отсутствует шум, а имеется лишь постоянная составляющая. Это значит, что и ковариационная функция выхода, и спектр, определяемые формулами (14.5.3), (14.7.5), тождественно равны нулю:

$$\begin{aligned} B_y[\tau] &= A^2 \{ \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) + 2B_x^2[\tau] \} \equiv 0, \\ G_y(\omega) &= A^2 \{ G_{2,2}^x(\omega) + 2G_x(\omega) \otimes G_x(\omega) \} \equiv 0. \end{aligned}$$

Из этих соотношений может быть извлечена полезная информация о неизвестном нам негауссовом двумоментном вероятностном распределении телеграфного сигнала. Так, очевидно, для любого телеграфного сигнала

$$\begin{aligned} \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) &= -2B_x^2[\tau], \\ G_{2,2}^x(\omega) &= -2G_x(\omega) \otimes G_x(\omega). \end{aligned} \quad (14.7.11)$$

Поскольку правые части (14.7.11) отрицательны, постольку у телеграфного сигнала и четвертая кумулянтная функция, и спектр четвертого порядка всегда отрицательны. Первое соотношение (14.7.11) дает нам возможность найти четвертую кумулянтную функцию для трех рассмотренных случаев телеграфного сигнала:

$$1) \quad \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) = -2h^4 e^{-4\pi n_0 |\tau|},$$

$$2) \quad \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) = -2h^4 \Delta^2 (\tau/T),$$

$$3) \quad \kappa_4^x(0, 0, \tau, \tau) = -2h^4 \frac{4}{\pi^2} \arcsin^2 \frac{B_\xi[\tau]}{B_\xi[0]}.$$

Интересно сравнить эти всюду отрицательные кумулянтные функции с четвертой кумулянтной функцией пуассоновского случайного процесса (14.7.8), которая всюду положительна.

4. Обратимся к спектрам телеграфного сигнала. Второе соотношение (14.7.11) означает, что каков бы ни был спектр второго порядка телеграфного сигнала, а как мы показали ранее, он может быть практически любым, спектр четвертого порядка всегда будет

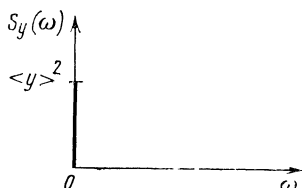
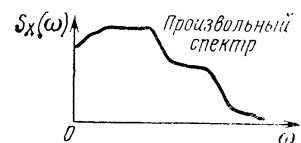


Рис. 14.5.

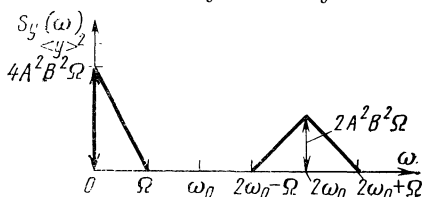
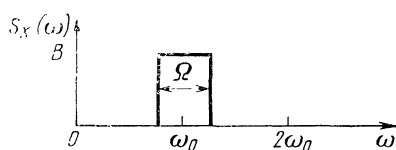


Рис. 14.6.

определяться его автосверткой, т. е. он уже не может быть произвольным. Этот результат весьма интересен. Если изобразить спектр входного телеграфного сигнала и спектр, имеющийся на выходе идеального квадратичного детектора (рис. 14.5), и сравнить эту картину с картиной преобразования спектра пуассоновского случайного процесса (рис. 14.4), то возникают три вопроса: чем объясняется разница в картинах выходных спектров, тем более разительная, что входные спектры могут быть одинаковыми? Куда «делся» выходной шум в случае телеграфного сигнала? Как понять «механизм исчезновения» спектральных компонент входного шума, и в каких случаях вообще может быть такое исчезновение?

Ответ на первый вопрос может быть дан сразу на основании проведенного анализа. Возможное разнообразие картин выходного спектра при одном и том же входном спектре и одном и том же нелинейном преобразовании связано с возможным разнообразием спектров высших порядков входного сигнала, т. е. фактически — с разнообразием негауссовости входа. В конкретном случае квадра-

* Для этого достаточно рассмотреть второй случай телеграфного сигнала, спектр которого (14.7.10) совпадает с (14.7.9) при $h^2 = \langle a^2 \rangle \varepsilon B^2$.

тичного детектора это разнообразие связано с различным видом входных спектров четвертого порядка $G_{2,2}^x(\omega)$.

Ответы на второй и третий вопросы требуют специального рассмотрения, которое будет проведено в § 14.9.

5. Детектирование гауссова шума. В этом случае формула (14.7.5) переходит в

$$G_y(\omega) = 2A^2 G_x(\omega) \otimes G_x(\omega).$$

Таким образом, спектр выхода равен свертке спектров входа. В качестве конкретного случая возьмем гауссов случайный процесс, обладающий прямоугольным спектром (рис. 14.6):

$$S_x(\omega) = G_x(\omega) = \begin{cases} B, & |\omega| \in \left[\omega_0 - \frac{\Omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Omega}{2} \right] \\ 0, & |\omega| \notin \left[\omega_0 - \frac{\Omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Omega}{2} \right], \end{cases}$$

имеющим центральную частоту ω_0 и ширину, равную Ω .

Операция свертки такого спектра выполняется чрезвычайно легко графически, и в результате мы получаем спектр, имеющий низкочастотную часть треугольной формы, простирающуюся до частоты Ω (так называемый «низкочастотный треугольник спектра»), и высокочастотную часть также треугольной формы, простирающуюся от частоты $2\omega_0 - \Omega$ до $2\omega_0 + \Omega$ с вершиной в точке $\omega = 2\omega_0$ (см., например, [53]). Соответствующий полный спектр выхода также изображен на рис. 14.6.

Таким образом, при квадратичном преобразовании входной спектр «расщепился» на две части: на низкочастотную часть и на часть, находящуюся в области удвоенных частот.

14.8. Преобразование спектров нестационарных процессов

1. Спектр мощности нестационарного процесса находится как сопряженная Фурье функции корреляции второго рода, т. е. корреляционной функции $K[t, t + \tau]$, усредненной по текущему времени [35]:

$$\Phi(\tau) \equiv \{K[t, t + \tau]\}_t \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T K[t, t + \tau] dt.$$

Это относится к спектру как входного, так и выходного процесса. Поэтому если при нелинейном преобразовании $x(t) \rightarrow y(t)$ искать $S_y(\omega)$ через $S_x(\omega)$ и через спектры высших порядков случайного процесса $x(t)$, то прежде всего необходимо выразить $\Phi_y(\tau)$ через $\Phi_x(\tau)$ и через временные усреднения высших кумулянтных функций $\{x_{p+q}^x(t^{[p]}, (t + \tau)^{[q]})\}_t$.

Согласно (14.3.4), (14.3.5) всегда можно представить $K_y [t, t + \tau]$ через кумулянтные функции $\kappa_{p+q}^x (t^{[p]}, (t + \tau)^{[q]})$, однако этого нельзя сделать *после* их усреднения по времени t , ибо K_y зависит от κ_{p+q}^x нелинейно. Все это ведет к тому, что при нестационарном входе $x(t)$ мы не можем выразить $S_y(\omega)$ через $S_x(\omega)$ и спектры высших порядков, так как это было для стационарных случайных процессов. Это значит, что нестационарность входного процесса весьма существенно усложняет соотношение между входным и выходным спектрами, вообще говоря, делает эту связь в общем случае несуществующей или, по крайней мере, неоднозначной.

Рассмотрим, например, прохождение нестационарного случайного процесса с нулевым средним значением через идеальный квадратичный детектор, корреляционная функция на выходе которого, согласно (14.5.2), равна

$$K_y [t_1, t_2] = A^2 \{ \kappa_4^x (t_1, t_1, t_2, t_2) + 2B_x^2 [t_1, t_2] + D_x (t_1) D_x (t_2) \}.$$

Полагая $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$ и заменяя $B_x [t_1, t_2]$ на $K_x [t_1, t_2]$, найдем

$$K_y [t, t + \tau] = A^2 \{ \kappa_4^x (t, t, t + \tau, t + \tau) + 2K_x^2 [t, t + \tau] + D_x (t) D_x (t + \tau) \}.$$

Чтобы получить функцию корреляции $\Phi_y(\tau)$, усредним обе части этого равенства по t :

$$\Phi_y(\tau) = A^2 \{ \{ \kappa_4^x (t, t, t + \tau, t + \tau) \}_t + 2 \{ K_x^2 [t, t + \tau] \}_t + \{ D_x (t) D_x (t + \tau) \}_t \}. \quad (14.8.1)$$

Спектры входного процесса определяются функциями

$$\Phi_x(\tau) = \{ K_x [t, t + \tau] \}_t, \quad \{ \kappa_4^x (t, t, t + \tau, t + \tau) \}_t.$$

Так как $\{ K_x^2 \}_t \neq \Phi_x^2$ и поскольку в (14.8.1) присутствует, кроме того, член $\{ D_x (t) D_x (t + \tau) \}_t$, который также имеет смысл некоторой функции корреляции, но не связан со спектром входного сигнала, то совершенно ясно, что какой-либо явной связи между входным и выходным спектрами мощности нет даже для гауссова нестационарного процесса. Итак, выходной спектр равен

$$S_y(\omega) = A^2 [\tilde{G}_{2,2}^x(\omega) + 2\mathcal{F}_c \{ \{ K_x^2 [t, t + \tau] \}_t; \omega\tau \} + \mathcal{F}_c \{ \{ D_x (t) D_x (t + \tau) \}_t; \omega\tau \}],$$

где слагаемое $\tilde{G}_{2,2}^x(\omega)$ есть косинус-сопряжения Фурье выражения $\{ \kappa_4^x (t, t, t + \tau, t + \tau) \}_t$ и может рассматриваться как спектр четвертого порядка нестационарного случайного процесса.

Таким образом, нестационарность случайного процесса вносит свои характерные особенности в закономерности преобразования спектров безынерционными нелинейными системами: спектры нестационарного случайного процесса преобразуются иначе, чем

стационарного, и значение входных спектров нестационарного процесса еще не определяет спектры выходных переменных.

2. Рассмотрим детектирование автоколебательного сигнала. Случайный процесс

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_t), \quad \varphi_t = \int_0^t \nu(u) du,$$

где φ_t , $\nu(t)$ — флуктуации фазы и частоты соответственно, представляет собой автоколебание, которое в пренебрежении амплитудными флуктуациями описывает выход любого реального автогенератора, независимо от его принципа действия и диапазона генерируемой частоты ω_0 . Пусть флуктуации частоты $\nu(t)$ являются стационарным гауссовым дельта-коррелированным процессом

$$\langle \nu(t) \rangle = 0, \quad \langle \nu(t), \nu(t + \tau) \rangle = \mathcal{D} \delta(\tau), \quad \mathcal{D} \ll \omega_0.$$

Этому случаю соответствует так называемое естественное уширение спектральной линии автоколебания, т. е. спектр

$$S_x(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\mathcal{D}/2}{\mathcal{D}^2/4 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\mathcal{D}/2}{\mathcal{D}^2/4 + (\omega + \omega_0)^2} \right],$$

соответствующий функции корреляции (см., например, [35])

$$\Phi_x(\tau) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\mathcal{D}}{2} |\tau|\right) \cos \omega_0 \tau.$$

Вид этого спектра автоколебания изображен на рис. 14.7. Он представляет собой резонансную кривую — спектральную линию, расположенную на несущей частоте ω_0 с шириной $\mathcal{D}$.

Чтобы отыскать спектр на выходе детектора, необходимо вычислить слагаемые функции корреляции (14.8.1). Расчет показывает, что ($\tau > 0$)

$$\begin{aligned} \{K_4^x(t, t, t + \tau, t + \tau)\}_t &= -\frac{1}{4} \left[2 + \frac{3}{2} \langle \cos 2\Delta\varphi \rangle \cos 2\omega_0 \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \langle \sin 2\Delta\varphi \rangle \sin 2\omega_0 \tau \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \left[2 + \frac{3}{2} e^{-\mathcal{D}\tau} \cos 2\omega_0 \tau \right], \\ \{K_x^2[t, t + \tau]\}_t &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{2} \langle \cos 2\Delta\varphi \rangle \cos 2\omega_0 \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \langle \sin 2\Delta\varphi \rangle \sin 2\omega_0 \tau \right] = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{2} e^{\mathcal{D}\tau} \cos 2\omega_0 \tau \right], \\ \{D_x(t) D_x(t + \tau)\}_t &= \frac{1}{4} \left[1 + \langle \cos 2\Delta\varphi \rangle \cos 2\omega_0 \tau - \right. \\ &\quad \left. - \langle \sin 2\Delta\varphi \rangle \sin 2\omega_0 \tau \right] = \frac{1}{4} [1 + e^{-\mathcal{D}\tau} \cos 2\omega_0 \tau]. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta\varphi = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$ есть набег фазы за время τ — гауссов процесс, для которого [35]

$$\langle \cos 2\Delta\varphi \rangle = e^{-\mathcal{D}\tau}, \quad \langle \sin 2\Delta\varphi \rangle = 0.$$

Собирая все слагаемые вместе, найдем

$$\Phi_{yy}(\tau) = \frac{A^2}{4} \left[1 + \frac{1}{2} e^{-\mathcal{D}|\tau|} \cos 2\omega_0 \tau \right].$$

Спектр, соответствующий этой функции корреляции, равен

$$S_y(\omega) = \frac{A^2}{4} \delta(\omega) + \frac{A^2}{16\pi} \left[\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}^2 + (\omega - 2\omega_0)^2} + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}^2 + (\omega + 2\omega_0)^2} \right] \quad (14.8.2)$$

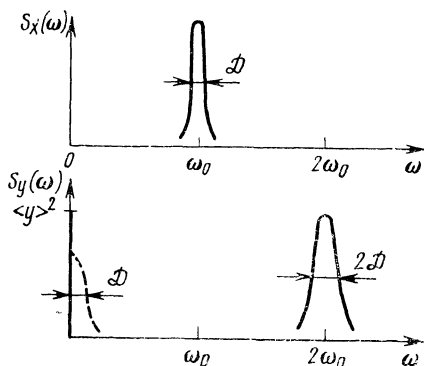


Рис. 14.7.

и состоит из спектра постоянной составляющей и резонансной кривой, расположенной на удвоенной частоте и имеющей удвоенную ширину. Его вид также изображен на рис. 14.7.

Весьма интересной особенностью полученного спектра является отсутствие слагаемого разностных частот (показанного на рисунке пунктиром). Это слагаемое существует при детектировании гауссова случайного процесса с аналогичным входным спектром (см. § 14.7), и оно должно было бы появиться

и здесь, если бы в состав $S_y(\omega)$ входила свертка $S_x(\omega) \otimes S_x(\omega)$ [ср. с (14.7.5)]. Таким образом, (ср. с § 14.7) возникает вновь вопрос: куда делись компоненты разностных спектральных составляющих?

Ответ на этот и ранее поставленные вопросы будет дан, как уже говорилось, в следующем параграфе, а сейчас заметим, что с отсутствием разностных частот в спектре $S_y(\omega)$ тесно связана ошибка одного метода измерения ширины спектральной линии автоколебания. Идея этого метода заключалась в следующем. Если на детектор подать узкополосный сигнал, то на выходе детектора кроме суммарных частот, дающих спектральное слагаемое на удвоенной частоте, должны присутствовать и разностные частоты, примыкающие к нулю и занимающие полосу, равную полосе узкополосного сигнала, независимо от его центральной частоты (так, как это изображено на рис. 14.6). Поэтому, измеряя полосу низкочастотного шума на выходе детектора, можно определить неизвестную нам ширину полосы узкополосного сигнала. Именно таким образом предполагалось измерить ширину спектральной линии лазера, используя в качестве детектора фотоумножитель [64].

Из полученного выражения (14.8.2) следует, однако, что никаких разностных частот в спектре выхода детектора нет. Это значит, что в приведенных рассуждениях содержится ошибка. К разбору возникшей ситуации мы сейчас и перейдем.

14.9. Парадокс нелинейного взаимодействия спектральных компонент

1. Перейдем теперь к выяснению причин исчезновения тех или иных спектральных компонент после квадратичного преобразования, заметив, что полученная ситуация является парадоксальной. В самом деле, если на вход детектора подать синусоидальное ко-

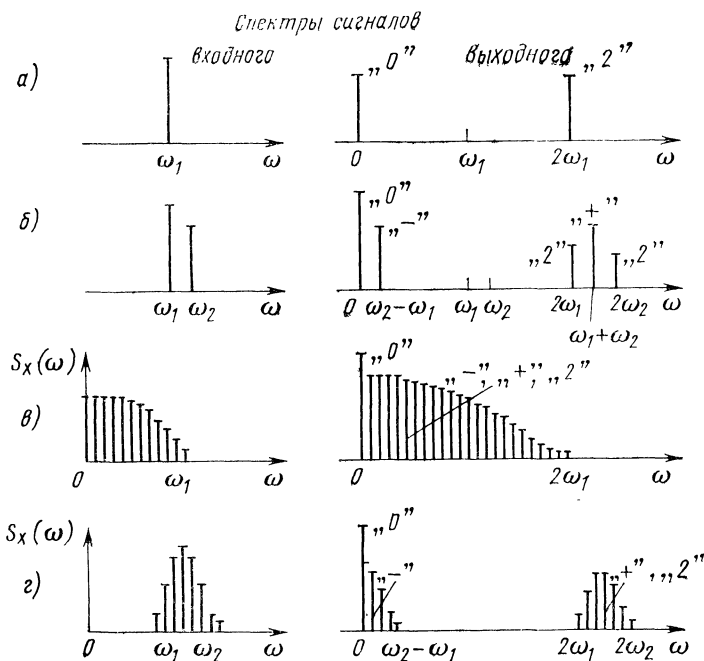


Рис. 14.8.

лебание $x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, то на выходе мы получим «постоянный ток» и колебание удвоенной частоты (рис. 14.8, а) в соответствии с

$$y = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_1).$$

Эти спектральные компоненты образовались от «сбивания» входной компоненты «самой с собой», в результате чего появились разностная (нулевая) частота и суммарная (удвоенная).

Та же ситуация имеет место и тогда, когда входной сигнал является суммой двух спектральных компонент:

$$x = a_1 \cos (\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos (\omega_2 t + \varphi_2).$$

Возведя эту сумму в квадрат, получим

$$\begin{aligned} y = & \left(\frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} \right) + a_1 a_2 \cos [(\omega_2 - \omega_1) t + \varphi_2 - \varphi_1] + \\ & + a_1 a_2 \cos [(\omega_1 + \omega_2) t + \varphi_1 + \varphi_2] + \\ & + \frac{a_1^2}{2} \cos 2 (\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{a_2^2}{2} \cos 2 (\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые образовались как разностные частоты, а второе, третье и четвертое — как суммарные, в результате чего в составе выходного спектра имеем нулевую компоненту «0», разностную «—», суммарную «+» и две удвоенные «2» (рис. 14.8, б).

Увеличивая число спектральных компонент, всегда можно с необходимой степенью точности представить их суммой любой случайный процесс (по существу это означает спектральное представление входного процесса). И тогда представляется очевидным, что на выходе квадратичного детектора всегда должны быть четыре спектральные группы: постоянная составляющая, группа компонент разностных частот, группа компонент суммарных частот и, наконец, группа компонент удвоенных частот в соответствии с тем, что если

$$x(t) = \sum_k a_k \cos (\omega_k t + \varphi_k), \quad (14.9.1)$$

то

$$\begin{aligned} y(t) = x^2(t) = & \sum_k \frac{1}{2} a_k^2 + \sum_{k \neq l} \sum_l a_k a_l \cos [(\omega_k - \omega_l) t + \\ & + \varphi_k - \varphi_l] + \sum_{k > l} \sum_l a_k a_l \cos [(\omega_k + \omega_l) t + \varphi_k + \varphi_l] + \\ & + \sum_k \frac{1}{2} a_k^2 \cos (2\omega_k t + 2\varphi_k). \end{aligned}$$

И казалось бы, что картина выходного спектра всегда должна соответствовать рис. 14.8, в, г. Однако, как следует из примеров, рассмотренных в предыдущих параграфах, это не всегда так.

2. Прежде всего, следует заметить, что в приведенном анализе мы вовсе не использовали информацию о вероятностном распределении входного процесса. Именно эту информацию нам теперь необходимо привлечь для решения парадокса. Кроме того, в изложенных рассуждениях имеется определенное несоответствие: картины спектра, изображенные на рис. 14.8, а и б, отличаются от картин, изображенных на рис. в и г, не только числом спектральных компонент. Это совершенно *различные* картины. Спектральные компоненты, входящие в спектры $S_x(\omega)$ (рис. в и г), не являются компо-

нентами, входящими в разложение (14.9.1). Компоненты a_k пропорциональны коэффициентам Фурье самого процесса

$$\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t); -\omega t\}, \quad (14.9.2)$$

в то время как компоненты $S_x(\omega)$ пропорциональны коэффициентам Фурье его корреляционной функции

$$S_x(\omega) = \mathcal{F}\{K_x[\tau]; -\omega\tau\}.$$

Это различие требует, чтобы весь анализ взаимодействия спектральных компонент при нелинейном преобразовании процесса шел или «на языке» компонент, входящих в состав $\hat{x}(\omega)$, или «на языке» компонент, входящих в состав $S_x(\omega)$.

3. Начнем разбор, обращаясь к спектральным компонентам $\hat{x}(\omega)$. Те спектры, преобразование которых нас интересует, являются спектрами мощности. Если искать выражение спектральной плотности мощности через коэффициент Фурье, то, как известно,

$$S_x(\omega) \sim \langle \hat{x}(\omega) \hat{x}^*(\omega') \rangle. \quad (14.9.3)$$

На выходе квадратичного детектора

$$S_y(\omega) \sim \langle \hat{x}(\omega) \hat{x}^*(\omega') \hat{x}(\omega'') \hat{x}^*(\omega''') \rangle. \quad (14.9.4)$$

Коэффициент Фурье $\hat{x}(\omega)$ согласно (14.9.2) является случайной функцией аргумента ω как определенный интеграл от случайного процесса. Это значит, что каждой реализации случайного процесса $x(t)$ соответствует определенная реализация $\hat{x}(\omega)$. При этом $\hat{x}(\omega)$, как и всякая случайная функция, обладает определенными статистическими связями по ω .

Из (14.9.3), (14.9.4) следует, что если картина спектра $S_x(\omega)$ определяется только *линейными* статистическими связями между различными спектральными компонентами $\hat{x}(\omega)$, то на вид спектра $S_y(\omega)$ оказывают влияние не только линейные связи, но и статистические связи *высших* порядков, а именно, второго и третьего.

Известно (см., например, [9]), что коэффициенты Фурье *стационарного* случайного процесса $x(t)$ обладают следующей ковариационной функцией:

$$\langle \hat{x}(\omega), \hat{x}^*(\omega') \rangle = G_x(\omega) \delta(\omega - \omega').$$

Это значит, что спектральные компоненты $\hat{x}(\omega)$ некоррелированы для различных значений аргументов. В то же время между ними существуют статистические связи высших порядков, так, например, в общем случае

$$\langle \hat{x}(\omega), \hat{x}^*(\omega'), \hat{x}(\omega''), \hat{x}^*(\omega''') \rangle \neq 0.$$

Если же случайный процесс стационарен и гауссов, то вследствие линейности (14.9.2) гауссовой будет и случайная функция $\hat{x}(\omega)$.

И вот в этом случае, и только в этом, спектральные компоненты $\hat{x}(\omega)$ будут для разных ω статистически независимыми.

С другой стороны, определение картины спектра выхода нелинейного преобразователя путем сбивания спектральных компонент правомерно только тогда, когда эти компоненты статистически независимы, поскольку любая статистическая связь между ними может существенно изменить общую картину и мы уже не можем считать, что в выходном спектре существуют независимо друг от друга различные разностные и суммарные частоты.

Из всего этого следует, что определение картины спектра после нелинейного преобразования методом сбивания спектральных компонент входа возможно только для гауссовых случайных процессов, ибо только для них эти спектральные компоненты статистически независимы.

Теперь понятно, почему картину выходного спектра в § 14.7, п. 5 мы смогли получить методом сбивания спектральных составляющих и не получили этого для п. 4. Из изложенного ясно, что метод сбивания неприменим также и в случае нестационарных, хотя бы и гауссовых случайных процессов, ибо для них $\hat{x}(\omega)$ и $\hat{x}(\omega'')$ уже не являются независимыми.

4. Проанализируем теперь сложившуюся ситуацию «на языке» спектральных компонент спектра мощности $S_x(\omega)$. Они представляются коэффициентами b_k , входящими в спектральное разложение корреляционной функции

$$K_x[\tau] = \sum_k b_k \cos(\omega_k \tau + \psi_k). \quad (14.9.5)$$

Поэтому теперь при нелинейном преобразовании $x(t)$ следует рассматривать взаимодействие спектральных составляющих, содержащихся в (14.9.5).

Для гауссова случайного процесса в $K_y[\tau]$, согласно (14.5.5), входит слагаемое $K_x^2[\tau]$. Это значит, что процесс детектирования сигнала сопровождается «детектированием» его функции корреляции. Это же имеет место, на основании (14.6.2), и для преобразования с любой степенью нелинейности (ср., например, с § 14.6).

Ситуация, однако, существенно меняется, если мы имеем негауссов случайный процесс. В этом случае выходная корреляционная функция [см. (14.5.4)] зависит не только от $K_x[\tau]$, но и от высших кумулянтных функций, которые также дают вклад во все выходные компоненты. Другими словами, здесь возникают негауссовы добавки к результатам сбивания входных компонент корреляционной функции, своего рода «интерференция высших порядков», в результате чего в выходном спектре могут пропадать целые группы спектральных компонент.

Если процесс $x(t)$ нестационарен, хотя и гауссов, то из (14.8.1) мы получаем для квадратичного преобразования

$$\Phi_y(\tau) = A^2 \{2 \{K_x^2[t, t + \tau]\}_t + \{D_x(t) D_x(t + \tau)\}_t\}.$$

Отсюда следует, что при детектировании самого процесса «детектирования» корреляционной функции $\Phi_y(\tau)$ не происходит. Этого одного уже достаточно для утверждения о неприменимости метода сбивания спектральных компонент для определения спектра на выходе при нестационарном гауссовом входном процессе.

Итак, использование метода сбивания спектральных компонент входного сигнала нелинейностями системы преобразования для получения картины спектра на выходе может быть правильным только для стационарных гауссовых случайных процессов. Этим утверждением и разрешается парадокс.

14.10. Преобразование спектров гауссовых шумов

1. В § 14.7 мы рассмотрели общие закономерности преобразования спектров нелинейными безынерционными системами и нашли, что в общем случае спектр мощности на выходе системы зависит от всех спектров негауссова входного стационарного шума $G_{p,q}^x(\omega)$. Если же входной процесс гауссов, то выходной спектр $S_y(\omega)$ полностью определяется всего одним спектром мощности $S_x(\omega)$. В этом случае мы можем получить наиболее полную и доступную информацию о зависимости выходного спектра от входного, и наша задача теперь заключается в отыскании вида этой зависимости для широкого класса нелинейных безынерционных преобразований.

2. Итак, пусть дано нелинейное безынерционное преобразование $y = y(x)$ случайного стационарного гауссова процесса $x = x(t)$ с $\langle x(t) \rangle = 0$.

Корреляционная функция выходной переменной согласно (14.6.2) представляется рядом

$$K_y[\tau] = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle y^{(s)} \rangle^2 K_x^s[\tau], \quad (14.10.1)$$

коэффициенты которого зависят только от D_x и сумму которого можно записать как¹

$$K_y[\tau] = R[K_x[\tau]], \quad (14.10.2)$$

где $R[...]$ — некоторая функция, определяемая конкретным видом преобразования.

Совершая косинус-преобразование Фурье от обеих частей (14.10.1) и воспользовавшись операцией свертки, найдем

$$S_y(\omega) = \langle y \rangle^2 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle y^{(n)} \rangle^2 \times \\ \times S_x(\omega) \otimes S_x(\omega) \otimes \dots \otimes S_x(\omega), \quad (14.10.3)$$

что также может быть представлено в виде

$$S_y(\omega) = \delta(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle y^{(n)} \rangle^2 [\otimes S_x(\omega)]^n, \quad (14.10.4)$$

если учесть свойства свертки дельта-функции. Таким образом, выходной спектр есть сумма автосверток входного спектра.

Сравнивая полученный ряд с (14.10.1) и (14.10.2), можно формально ввести сумму ряда (14.10.4) как

$$S_y(\omega) = \delta(\omega) R[\otimes S_x(\omega)]. \quad (14.10.5)$$

Смыслом этой краткой записи, тем не менее, остается ряд (14.10.4), ибо другого рецепта раскрытия этой формулы нет.

Из сравнения (14.10.1) и (14.10.3) видно, что слагаемому $K_x^n[\tau]$ соответствует слагаемое $[\otimes S_x(\omega)]^n$. Следовательно, n -й степени нелинейности корреляционной функции соответствуют биения n -го порядка спектральных компонент $S_x(\omega)$. Тем самым, спектр $S_y(\omega)$ может рассматриваться как результат соответствующих взаимодействий спектральных компонент, входящих в $S_x(\omega)$.

3. Перейдем теперь к рассмотрению ряда конкретных примеров.

Нелинейное преобразование низкочастотного шума. Пусть входной шум имеет спектральную плотность

$$S_x(\omega) = Q\Delta^2 (\Delta^2 + \omega^2)^{-1}. \quad (14.10.6)$$

Полоса этого шума равна (в области положительных значений ω) Δ , и он может образоваться в результате прохождения белого шума через RC — фильтр нижних частот. Подвергнем этот шум нелинейному преобразованию.

Возьмем сначала идеальный квадратичный детектор с характеристикой $y = Ax^2$. Согласно (14.10.3) выходной спектр будет содержать два слагаемых:

$$S_y(\omega) = A^2 D_x^2 \delta(\omega) + 2A^2 S_x(\omega) \otimes S_x(\omega) \quad (14.10.7)$$

— постоянную составляющую и автосвертку входного спектра. Свертку спектров (14.10.6) можно искать двояко. Во-первых, можно ее вычислять непосредственно, используя определение свертки как интеграла. Во-вторых, можно обойти это интегрирование, если сначала найти функцию ковариации $B_y[\tau]$, а затем взять ее сопряженную Фурье.

Второй путь гораздо проще, и мы воспользуемся им, тем более, что нам известно выражение для корреляционной функции входа, соответствующей спектру (14.10.6):

$$K_x[\tau] = \pi Q \Delta e^{\Delta|\tau|} = D_x e^{-\Delta|\tau|}.$$

Значит, согласно (14.10.1)

$$K_y[\tau] = A^2 D_x^2 + 2A^2 K_x^2[\tau] = A^2 D_x^2 + 2A^2 \pi^2 Q^2 \Delta^2 e^{-2\Delta|\tau|}.$$

Следовательно,

$$S_y(\omega) = A^2 D_x^2 \delta(\omega) + 2A^2 \left\{ \frac{\pi Q^2 \Delta}{2} \frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 + \omega^2} \right\}. \quad (14.10.8)$$

Сравнивая (14.10.7) с (14.10.8), видим, что выражение, стоящее в фигурных скобках, является автосверткой спектра (14.10.6).

Интересно отметить, что флуктуационная часть выходного спектра по-прежнему имеет резонансную форму, но уже удвоенной ширины. Это связано с экспоненциальным видом входной корреляционной функции. Поэтому при любом нелинейном степенном преобразовании шума, обладающего резонансной формой спектра, мы всегда получим спектр, состоящий из суперпозиции резонансных кривых различной высоты и ширины.

Получившееся уширение выходного спектра по сравнению с входным является характернейшей чертой нелинейных безынерционных преобразований (см. также ниже п. 4).

Если квадратичный детектор обладает «реальной» характеристикой

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2,$$

то

$$S_y(\omega) = [A_0 + A_2 D_x]^2 \delta(\omega) + A_1^2 Q \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + \omega^2} + \\ + 2A_2^2 \frac{\pi Q^2 \Delta}{2} \frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 + \omega^2}.$$

Дополнительное слагаемое в этом выражении пропорционально входному спектру.

Для преобразования входного шума полиномиальной нелинейностью

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$$

в соответствии с (14.6.5)

$$K_y[\tau] = h_0^2 + h_1^2 K_x[\tau] + \frac{1}{2!} h_2^2 K_x^2[\tau] + \dots + \\ + \frac{1}{n!} h_n^2 K_x^n[\tau],$$

где $h_k = h_k(D_k, A_j)$.

Спектральная плотность выходного процесса равна

$$S_y(\omega) = h_0^2 \delta(\omega) + h_1^2 S_x(\omega) + \frac{1}{2!} h_2^2 S_x(\omega) \otimes S_x(\omega) + \dots + \\ + \frac{1}{n!} h_n^2 \underbrace{S_x(\omega) \otimes \dots \otimes S_x(\omega)}_n.$$

Поскольку

$$K_x^n[\tau] = (\pi Q \Delta)^n e^{-n\Delta|\tau|} = Q^n \frac{(\pi \Delta)^{n-1}}{n} (\pi n \Delta) e^{-n\Delta|\tau|},$$

то, следовательно,

$$\underbrace{S_x(\omega) \otimes \dots \otimes S_x(\omega)}_n = Q^n \frac{(\pi \Delta)^{n-1}}{n} \frac{(n\Delta)^2}{(n\Delta)^2 + \omega^2}. \quad (14.10.9)$$

Спектр на выходе системы с полиномиальной нелинейностью представляет собой суперпозицию n резонансных кривых возрастающей ширины.

Нелинейное преобразование узкополосного шума. В § 14.7 мы уже рассматривали идеальное детектирование узкополосного шума, имеющего прямоугольный спектр, и получили картину выходного спектра, изображенную на рис. 14.6. Кроме постоянной составляющей, спектр содержал разностные частоты, примыкающие к нулю, а также суммарные частоты, расположенные около удвоенного значения центральной частоты. Как хорошо известно, прямоугольная форма спектра не является физически корректной идеализацией, поэтому представляет интерес рассмотреть детектирование узкополосного шума, обладающего реальной формой спектра.

Рассмотрим стационарный узкополосный шум, спектр которого сосредоточен около частоты ω_0 , и пусть для простоты этот спектр симметричен относительно $\omega - \omega_0$. В этом случае (см., например, [35]) корреляционная функция рассматриваемого шума равна

$$K_x[\tau] = A(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad (14.10.10)$$

где $A(\tau)$ — четная, медленно меняющаяся по сравнению с $\cos \omega_0 \tau$ функция, сопряженная Фурье которой определяет форму спектра $W_x(\omega - \omega_0)$ (рис. 14.9).

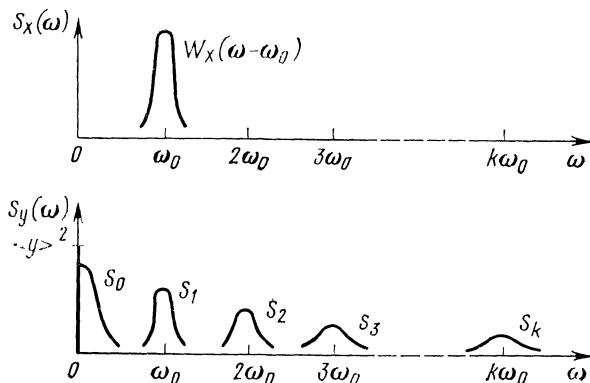


Рис. 14.9.

Возводя (14.10.10) в степень, найдем

$$K_{\tau}^s[\tau] = A^s(\tau) \frac{1}{2^{s-1}} \begin{cases} C_{2n-1}^n + \sum_{k=1}^n C_{2n-k}^{n-k} \cos 2k\omega_0 \tau, & s=2n, \\ \sum_{k=1}^n C_{2n-1}^{n-k} \cos (2k-1)\omega_0 \tau, & s=2n-1. \end{cases} \quad (14.10.11)$$

Подставляя (14.10.11) в (14.10.1) и группируя слагаемые, получим

$$K_y[\tau] = \langle y \rangle^2 + B_0[\tau] + B_1[\tau] \cos \omega_0 \tau + B_2[\tau] \cos 2\omega_0 \tau + \dots + B_n[\tau] \cos n\omega_0 \tau + \dots, \quad (14.10.12)$$

где $B_k[\tau]$ — четные функции, равные

$$B_0[\tau] = \frac{1}{2!} \langle y'' \rangle^2 \frac{1}{2} A^2(\tau) + \frac{1}{4!} \langle y^{(4)} \rangle^2 \frac{3}{8} A^4(\tau) + \dots + \frac{1}{(2n)!} \langle y^{(2n)} \rangle^2 \frac{C_{2n-1}^n}{2^{2n-1}} A^{2n}(\tau) + \dots,$$

$$B_1[\tau] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \langle y^{(2n-1)} \rangle^2 \frac{C_{2n-1}^{n-1}}{2^{2n-2}} A^{2n-1}(\tau),$$

$$B_2[\tau] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \langle y^{(2n)} \rangle^2 \frac{C_{2n}^{n-1}}{2^{2n-1}} A^{2n}(\tau),$$

.....

$$B_{2s-1}[\tau] = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \langle y^{(2n-1)} \rangle^2 \frac{C_{2n-1}^{n-s}}{2^{2n-2}} A^{2n-1}(\tau),$$

$$B_{2s}[\tau] = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \langle y^{(2n)} \rangle^2 \frac{C_{2n}^{n-s}}{2^{2n-1}} A^{2n}(\tau).$$

Таким образом, $B_{2s-1}[\tau]$ представляет собой суперпозицию нечетных степеней $A(\tau)$, начиная со степени $2s-1$, а $B_{2s}[\tau]$ — суперпозицию четных степеней $A(\tau)$, начиная с $A^{2s}(\tau)$.

Выполняя преобразование Фурье ряда (14.10.12), найдем спектральную плотность выходного случайного процесса

$$S_y(\omega) = \langle y \rangle^2 \delta(\omega) + S_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\omega), \quad (14.10.13)$$

где

$$\begin{aligned} S_0(\omega) &= \mathcal{F}_c \{B_0[\tau]; \omega\tau\} = \\ &= \delta(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y^{(2n)} \rangle^2}{(2n)!} \frac{C_{2n-1}^n}{2^{2n-1}} [\otimes W_x(\omega)]^{2n} \end{aligned} \quad (14.10.14)$$

есть низкочастотная часть спектра, примыкающая к нулевой частоте, а спектры $S_k(\omega)$ группируются около частот $k\omega_0$, и их форма равна ($\Omega = \omega - k\omega_0$)

$$W_h(\Omega) = \mathcal{F}_c \{B_h[\tau]; \Omega\tau\} = \begin{cases} \delta(\omega) \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \langle y^{(2n-1)} \rangle^2 \frac{C_{2n-1}^{n-s}}{2^{2n-2}} [\otimes W_x(\Omega)]^{2n-1}, \\ \delta(\omega) \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \langle y^{(2n)} \rangle^2 \frac{C_{2n}^{n-s}}{2^{2n-2}} [\otimes W_x(\Omega)]^{2n}, \end{cases} \quad \begin{matrix} k=2s-1; \\ k=2s. \end{matrix} \quad (14.10.15)$$

Таким образом, выходной спектр состоит из постоянной составляющей, низкочастотной компоненты $S_0(\omega)$ и высокочастотных компонент $S_k(\omega)$. Форма каждой компоненты при этом представляет суперпозицию автосверток формы спектра входного сигнала. Общий вид входного и выходного спектра указан на рис. 14.9.

Для дальнейшей конкретизации выходного спектра следует задать вид нелинейного преобразования и форму входного спектра.

Квадратичное детектирование узкополосного шума. Пусть входной шум обладает спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = Q \left[\frac{\Delta^2}{\Delta^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] \quad (14.10.16)$$

с шириной спектра $\Delta \ll \omega_0$. Форма спектра $W(\Omega)$, соответствующая (14.10.16), равна

$$W(\Omega) = 2Q\Delta^2/(\Delta^2 + \Omega^2).$$

Если квадратичный детектор является идеальным, то $\langle y \rangle = A_2 D_x$, $\langle y' \rangle = 0$, $\langle y'' \rangle = 2A_2$ и на выходе детектора согласно (14.10.13) — (14.10.15), кроме постоянной составляющей, будет низкочастотный шум со спектральной плотностью

$$S_0(\omega) = \delta(\omega) A_2^2 [\otimes W(\omega)]^2 = 2A_2^2 \pi Q^2 \Delta^4 \Delta^2 / (4\Delta^2 + \omega^2),$$

а также высокочастотный шум со спектром, сосредоточенным около $\omega = 2\omega_0$, форма которого равна ($\Omega = \omega - 2\omega_0$)

$$W_2(\Omega) = \delta(\omega) A_2^2 [\otimes W(\Omega)]^2 = 2A_2^2 \pi Q^2 \Delta^4 \Delta^2 / (4\Delta^2 + \Omega^2).$$

Таким образом, обе компоненты спектра выходного шума имеют также резонансную форму удвоенной ширины. Полный спектр запишется, следовательно, как

$$S_y(\omega) = A_2^2 D_x^2 \delta(\omega) + 2A_2^2 \pi Q^2 \Delta \frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 + \omega^2} + A_2^2 \pi Q^2 \Delta \left[\frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 + (\omega - 2\omega_0)^2} + \frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 + (\omega + 2\omega_0)^2} \right]. \quad (14.10.17)$$

Сравнивая полученную картину с рис. 14.6, мы видим, к чему привела гладкость спектра входного сигнала: вместо «треугольников» выходного спектра, соответствующих прямоугольной форме входного спектра, мы имеем повторение резонансной формы.

Если искать распределение выходной мощности по трем слагаемым выходного спектра: постоянной составляющей, низкочастотной и высокочастотной, то нетрудно обнаружить, что она распределяется между этими компонентами поровну.

При детектировании шума со спектром (14.10.16) реальным квадратичным детектором в выходной спектр (14.10.17), во-первых, добавится слагаемое, пропорциональное входному спектру, равное $A_1^2 S_x(\omega)$, и, во-вторых, изменится постоянная составляющая, которая теперь будет равна $\langle y \rangle = A_0 + A_2 D_x$. Таким образом, на выходе реального квадратичного детектора опять присутствует не только «продетектированный» спектр, но и входной спектр непосредственно.

Спектр на выходе линейного детектора. На основании (14.6.6), (14.6.7)

$$K_y[\tau] = \frac{k^2}{2\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{K_x[\tau]}{D_x} \right] K_x[\tau] + \sqrt{D_x^2 - K_x^2[\tau]} \right\} = \frac{k^2 D_x}{2\pi} + \frac{k^2}{4} K_x[\tau] + \frac{k^2}{4\pi D_x} K_x^2[\tau] + \frac{k^2}{2\pi D_x^3 4!} K_x^4[\tau] + \dots + \text{четные степени } K_x[\tau].$$

Следовательно, согласно (14.10.5)

$$S_y(\omega) = \frac{k^2}{2\pi} \delta(\omega) \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\otimes S_x(\omega)}{D_x} \right] \otimes S_x(\omega) + \sqrt{D_x^2 - [\otimes S_x(\omega)]^2} \right\}.$$

Если на входе линейного детектора присутствует узкополосный шум, то картина преобразования спектров будет иметь вид, изображенный на рис. 14.9, где из всех нечетных компонент будет входить только S_1 . Если провести анализ состава резонансных форм, входящих в виде суперпозиции в ту или иную компоненту выходного спектра, то можно составить таблицу

$$S_0 : \dots 2\Delta, 4\Delta, 6\Delta, 8\Delta, \dots$$

$$S_1 : \Delta$$

$$S_2 : \dots 2\Delta, 4\Delta, 6\Delta, 8\Delta, \dots$$

$$S_4 : \dots \dots, 4\Delta, 6\Delta, 8\Delta, \dots$$

$$S_8 : \dots \dots, \dots, 6\Delta, 8\Delta, \dots,$$

показывающую, какой ширины резонансные кривые вносят вклад в соответствующую компоненту.

Если входной шум обладает спектральной плотностью (14.10.16), то можно показать, что низкочастотная компонента выходного спектра равна ($D_x = 2\pi Q\Delta$)

$$S_0(\omega) = \frac{k^2 D_x}{2\pi^2} \left[\frac{1}{2! \cdot 2} \frac{2\Delta}{4\Delta^2 + \omega^2} + \frac{3}{4! \cdot 8} \frac{4\Delta}{16\Delta^2 + \omega^2} + \right. \\ \left. + \frac{10}{6! \cdot 32} \frac{6\Delta}{36\Delta^2 + \omega^2} + \dots \right].$$

Этот ряд довольно быстро сходится, так что можно принимать во внимание лишь первые слагаемые.

Преобразование спектра сильным ограничителем. Согласно (14.6.8), (14.6.9) корреляционная функция на выходе сильного ограничителя равна

$$K_y[\tau] = \frac{2h^2}{\pi} \arcsin \frac{K_x[\tau]}{D_x}.$$

Соответственно

$$S_y(\omega) = \frac{2h^2}{\pi} \delta(\omega) \arcsin \frac{\otimes S_x(\omega)}{D_x}.$$

Поскольку в $K_y[\tau]$ входят только нечетные степени корреляционной функции входа, то на выходе, при узкополосном сигнале на входе, мы не получим ни постоянной составляющей, ни низкочастотной компоненты, а будут присутствовать только нечетные компоненты S_k .

Если выписать компоненту $S_1(\omega)$, то согласно (14.10.15) можно найти, что если $S_x(\omega)$ дается формулой (14.10.16), то форма спектра $S_1(\omega)$ будет иметь вид ($\Omega = \omega - \omega_0$)

$$W_1(\Omega) = \frac{2h^2}{\pi^2} \left\{ \frac{\Delta}{\Delta^2 + \Omega^2} + \frac{3}{3! \cdot 4} \frac{3\Delta}{9\Delta^2 + \Omega^2} + \right. \\ \left. + \frac{9 \cdot 10}{5! \cdot 16} \frac{5\Delta}{25\Delta^2 + \Omega^2} + \dots \right\}.$$

4. Для случайных процессов $x(t)$, спектр которых примыкает к нулю, можно получить некоторые интересные общие закономерности, не конкретизируя ни точного вида спектра, ни характера нелинейности. Нетрудно понять, что выходной спектр $G_y(\omega)$ при любой нелинейности также будет примыкать к нулю, поскольку он получается в результате суперпозиции автосверток $S_x(\omega)$. Обозначим полосу входного спектра через Δ_x , определив ее соотношением

$$\Delta_x^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S_x(\Omega) d\Omega / \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\Omega) d\Omega. \quad (14.10.18)$$

Полосу выходного спектра обозначим через Δ_y , определив ее таким же образом через спектр $G_y(\omega)$ (мы сейчас не рассматриваем возможную постоянную составляющую на выходе). Введем также времена корреляции входного и выходного случайных процессов

$$\tau_x \equiv \Delta_x^{-1}, \quad \tau_y \equiv \Delta_y^{-1}.$$

Поставим теперь задачу отыскания взаимосвязей между Δ_y и Δ_x или между τ_y и τ_x , не конкретизируя вида входного спектра. Соотношение (14.10.18) может быть записано в виде

$$\Delta_x^2 = \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle \frac{1}{\langle x^2 \rangle} = - \left(\frac{d^2 K_x[\tau]}{d\tau^2} \right)_{\tau=0} \frac{1}{D_x}.$$

Таким образом, время корреляции входного случайного процесса может быть определено и как

$$\tau_x^2 = D_x \left| \frac{d^2 K_x[\tau]}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}^{-1}.$$

Время корреляции выходного процесса находится из аналогичного соотношения при замене $D_x \rightarrow D_y$, $K_x \rightarrow K_y$.

Вследствие того, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 K_y}{d\tau^2} \right)_{\tau=0} &= \left[\frac{\partial^2 K_y}{\partial K_x^2} \left(\frac{dK_x}{d\tau} \right)^2 + \frac{\partial K_y}{\partial K_x} \frac{d^2 K_x}{d\tau^2} \right]_{\tau=0} = \\ &= \left(\frac{\partial K_y}{\partial K_x} \right) \left(\frac{d^2 K_x}{d\tau^2} \right)_{\tau=0}, \end{aligned}$$

времена корреляции выхода и входа нелинейной системы связаны соотношением

$$\tau_y^2 = \left[D_y / D_x \left(\frac{dK_y}{dK_x} \right)_{\tau=0} \right] \tau_x^2.$$

Поскольку на основании (14.6.12)

$$\left(\frac{dK_y}{dK_x} \right)_{\tau=0} = \langle [y'(x)]^2 \rangle,$$

то получаем окончательно следующее соотношение между τ_y и τ_x [63]:

$$\frac{\tau_y}{\tau_x} = \sqrt{\frac{D_y}{D_x \langle [y'(x)]^2 \rangle}}. \quad (14.10.19)$$

Можно показать, что правая часть этого равенства всегда не более единицы. По этой причине $\tau_y \leq \tau_x$, $\Omega_y \geq \Omega_x$.

Этот результат нетрудно понять, если учесть, что $S_y(\omega)$ представляет собой ряд по степеням автосверток $S_x(\omega)$, а всякая свертка может только расширять спектр за счет возникновения комбинационных частот. Следовательно, в общем случае любое безынерционное нелинейное устройство может лишь расширять входной спектр.

Пусть гауссов шум, обладающий спектром, сосредоточенным около нулевой частоты, преобразуется нелинейным устройством n -й нечетной степени $y = y(x) = A_n x^n$. Поскольку

$$\begin{aligned} D_y &= \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = A_n^2 [\langle x^{2n} \rangle - \langle x^n \rangle^2] = \\ &= A_n^2 (2n-1)!! D_x^n, \\ \langle [y'(x)]^2 \rangle &= A_n^2 n^2 \langle x^{2n-2} \rangle = A_n^2 n^2 (2n-3)!! D_x^{n-1}, \end{aligned}$$

то согласно (14.10.19)

$$\tau_y = (2n - 1)^{1/2} n^{-1} \tau_x.$$

Соответственно ширина спектра шума на выходе рассматриваемого нелинейного устройства будет связана с шириной входного шума соотношением

$$\Delta_y = n (2n - 1)^{-1/2} \Delta_x$$

и будет сколь угодно увеличиваться при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, нелинейное устройство с характеристикой $y \sim x^n$ может быть использовано для получения шума с достаточно широким спектром.

5. Также нетрудно в общем виде определить и закон спадания «крыльев» спектра $S_y(\omega)$, если этот закон известен для $S_x(\omega)$. В самом деле, как известно, поведение $S_y(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ определяется поведением $B_y[\tau]$ при $\tau \rightarrow +0$, а именно, для достаточно больших ω имеет место соотношение [35]

$$S_y(\omega) \simeq -\omega^{-2} \left(\frac{dB_y[\tau]}{d\tau} \right)_{\tau=+0}.$$

Следовательно, принимая во внимание (14.6.12), находим

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= -\frac{\langle [y'(x)]^2 \rangle}{\omega^2} \left(\frac{dB_x[\tau]}{d\tau} \right)_{\tau=+0} = \\ &= \langle [y'(x)]^2 \rangle S_x(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, закон спадания спектра $S_y(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ в точности совпадает с соответствующим законом для $S_x(\omega)$. Характером нелинейности безынерционной системы определяется лишь коэффициент пропорциональности.

Это обстоятельство хорошо видно из сравнения значений $S_y(\omega)$ с $S_x(\omega)$, полученных в рассмотренных примерах этого параграфа, а особенно из сравнения (14.10.6) с (14.10.9).

14.11. Связь параметров многомоментных распределений

1. До сих пор мы рассматривали закономерности преобразования параметров одномоментных и двумоментных вероятностных распределений, которые, как уже неоднократно подчеркивалось, играют основную роль при анализе случайных процессов. Вместе с тем, иногда необходимо найти некоторые характеристики многомоментных распределений на выходе нелинейных безынерционных систем и выразить их через кумулянты входного распределения.

Не представляет никакого труда провести обобщение кумулянтных уравнений и на многомоментные распределения случайных процессов. В этом параграфе мы приведем некоторые формулы этого обобщения, но подробным анализом заниматься не будем, поскольку принципиально новых результатов здесь не получается, в то время как изложение становится громоздким.

Пусть входное многомоментное распределение случайного процесса $x(t)$ задано набором кумулянтных функций

$$\kappa_s^x(t_1^{[p_1]}, t_2^{[p_2]}, \dots, t_N^{[p_N]}) = \kappa_{p_1, p_2, \dots, p_N}^{x_1, x_2, \dots, x_N},$$

где введены обозначения: $x_k = x(t_k)$, $p_1 + p_2 + \dots + p_N = s$. Тогда для нелинейного безынерционного преобразования $y = y(x)$ и какой-либо функции $F[y_1, y_2, \dots, y_N]$, где $y_k = y(x_k)$, на основании (3.3.5) можно записать, например, следующее кумулянтное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle F[y_1, y_2, \dots, y_N] \rangle}{\partial \kappa_{p_1, p_2, \dots, p_N}^{x_1, x_2, \dots, x_N}} = \\ = \frac{1}{p_1! p_2! \dots p_N!} \left\langle \frac{\partial^s F[y_1, y_2, \dots, y_N]}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_N^{p_N}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (14.11.1)$$

Используя это уравнение многократно, получим и все остальные уравнения, подобные (3.3.6).

2. Чаше всего, однако, приходится рассматривать моментные функции выхода

$$\alpha_N^y(t_1, t_2, \dots, t_N) = \langle y_1 y_2 \dots y_N \rangle,$$

для которых (14.11.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_N^y(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial \kappa_{t_1^{[p_1]}, t_2^{[p_2]}, \dots, t_N^{[p_N]}}^x} = \\ = \frac{1}{p_1! p_2! \dots p_N!} \left\langle \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}} y(x_1) \frac{\partial^{p_2}}{\partial x_2^{p_2}} y(x_2) \dots \frac{\partial^{p_N}}{\partial x_N^{p_N}} y(x_N) \right\rangle. \end{aligned} \quad (14.11.2)$$

Если, в частности, все индексы p_i равны нулю или единице и если число индексов, равных единице, равно $s \leq N$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_N^y(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial \kappa_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s)} = \langle y'(x_1) y'(x_2) \dots y'(x_s) y(x_{s+1}) \dots \\ \dots y(x_N) \rangle. \end{aligned}$$

В том частном случае, когда $s = N$ и когда все моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_s$ различны, можно в последней формуле моментную функцию заменить на кумулянтную:

$$\frac{\partial \alpha_s^y(t_1, \dots, t_s)}{\partial \kappa_s^x(t_1, \dots, t_s)} = \langle y'(x_1) y'(x_2) \dots y'(x_s) \rangle.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^n \chi_s^y(t_1, \dots, t_s)}{[\partial \chi_s^x(t_1, \dots, t_s)]^n} = \langle y^{(n)}(x_1) y^{(n)}(x_2) \dots y^{(n)}(x_s) \rangle.$$

14.12. Нелинейные преобразования гауссовой совокупности

1. Если совокупность входных случайных процессов $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$ есть гауссова, то любые статистические характеристики выходной совокупности $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_M(t)\}$ зависят только от средних значений $m_i(t)$ и ковариационных функций $B_{ij}[t_1, t_2]$. Производные выходных моментных функций (взятых в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_Q$) по среднему значению и ковариационной функции принимают согласно (14.11.1) следующий вид ($i, j = 1, 2, \dots, N$; $k, l = 1, 2, \dots, Q$):

$$\frac{\partial \alpha_{q_1, q_2, \dots, q_M}^{y_1, y_2, \dots, y_M}}{\partial m_i(t_k)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{r=1}^M f_r^{q_r}(x_1, x_2, \dots, x_N) \right\rangle,$$

$$\frac{\partial \alpha_{q_1, q_2, \dots, q_M}^{y_1, y_2, \dots, y_M}}{\partial B_{ij}[t_k, t_l]} = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \prod_{r=1}^M f_r^{q_r}(x_1, x_2, \dots, x_N) \right\rangle.$$

Здесь $y_l = f_l(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Будем далее интересоваться разложением выходных моментных функций только по входным ковариационным функциям и только для значений $q_1 = q_2 = \dots = q_M = 1$, т. е. рассматривать уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \langle y_1(t_1) y_2(t_2) \dots y_s(t_s) \rangle}{\partial B_{ij}^n[t_k, t_l]} = \\ = \left\langle \frac{\partial^{2n}}{\partial x_i^n \partial x_j^n} \prod_{r=1}^s f_r(x_1, x_2, \dots, x_N) \right\rangle. \end{aligned} \quad (14.12.1)$$

2. Обратимся к двухполюсной нелинейной безынерционной системе, изображенной на рис. 14.10. Пусть взаимосвязь выходов со входами определяется уравнениями

$$y_1 = f(x_1, x_2), \quad y_2 = g(x_1, x_2),$$

где $\{x_1(t), x_2(t)\}$ — стационарная совокупность гауссовых случайных процессов с заданными значениями

$$\begin{aligned} m_1 = \langle x_1(t) \rangle, \quad m_2 = \langle x_2(t) \rangle, \quad B_1[\tau] = \langle x_1(t), x_1(t+\tau) \rangle, \\ B_2[\tau] = \langle x_2(t), x_2(t+\tau) \rangle, \quad B_{12}[\tau] = \langle x_1(t), x_2(t+\tau) \rangle. \end{aligned}$$

Связь выходных корреляционных функций $K_1^y[\tau]$, $K_2^y[\tau]$, $K_{12}^y[\tau]$ с ковариационными функциями входа определяется следующими уравнениями:

$$\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3}}{\partial B_1^{n_1} \partial B_2^{n_2} \partial B_{12}^{n_3}} \left\{ \begin{matrix} K_1^y[\tau] \\ K_2^y[\tau] \\ K_{12}^y[\tau] \end{matrix} \right\} = \left\langle \frac{\partial^{2(n_1+n_2+n_3)}}{\partial x_1^{n_1+n_3} \partial x_{1\tau}^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_{2\tau}^{n_2+n_3}} \left\{ \begin{matrix} f f_\tau \\ g g_\tau \\ f g_\tau \end{matrix} \right\} \right\rangle, \quad (14.12.2)$$

где $f_\tau = f(x_{1\tau}, x_{2\tau})$, $g_\tau = g(x_{1\tau}, x_{2\tau})$, $x_{1\tau} = x_1(t + \tau)$, $x_{2\tau} = x_2(t + \tau)$. С помощью этих уравнений можно легко найти коэффициенты разложения искомых корреляционных функций по степеням $B_1^{n_1} B_2^{n_2} B_{12}^{n_3}$. При их вычислении случайные переменные $x_1, x_2, x_{1\tau}, x_{2\tau}$ полагаются статистически независимыми.



Рис. 14.10.

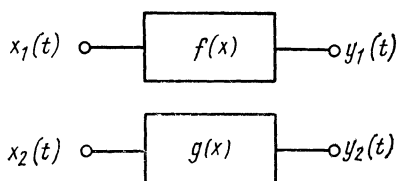


Рис. 14.11.

Если нелинейная система имеет «разделенные каналы», рис.14.11, так что

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = g(x_2),$$

то корреляционные функции $K_1^y[\tau]$, $K_2^y[\tau]$ определяются согласно § 14.6, спектральные плотности $S_1^y(\omega)$, $S_2^y(\omega)$ — согласно § 14.10, а уравнение для $K_{12}^y[\tau]$ на основании (14.12.2) имеет вид

$$\frac{d^n K_{12}^y[\tau]}{dB_{12}^n[\tau]} = \langle f^{(n)}(x_1) g^{(n)}(x_{2\tau}) \rangle.$$

Это уравнение также было получено ранее Р. Прайсом [47] для гауссовой входной совокупности случайных процессов. Начальные условия этого дифференциального уравнения таковы:

$$\left. \frac{d^n K_{12}^y[\tau]}{dB_{12}^n[\tau]} \right|_{B_{12}=0} = \langle f^{(n)}(x_1) \rangle \langle g^{(n)}(x_2) \rangle.$$

Отсюда нетрудно написать ковариационный ряд для $K_{12}^y[\tau]$ по степеням совместной ковариационной функции [ср. с (4.6.13)]:

$$K_{12}^y[\tau] = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)}(x_1) \rangle \langle g^{(s)}(x_2) \rangle B_{12}^s[\tau]. \quad (14.12.3)$$

Выполняя косинус-преобразование Фурье обеих частей этого выражения, найдем совместную спектральную плотность выходных переменных:

$$S_{y_1 y_2}(\omega) = \delta(\omega) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)}(x_1) \rangle \langle g^{(s)}(x_2) \rangle [\otimes G_{x_1 x_2}(\omega)]^s. \quad (14.12.4)$$

Коэффициенты разложений (14.12.3), (14.12.4) зависят от средних значений и дисперсий входных переменных.

3. Теперь рассмотрим пример.

Пример 14.12.1. Пусть на два отдельных канала, обладающих разными характеристиками (рис. 14.11), подается один и тот же случайный процесс. Требуется найти совместную ковариационную функцию выходов, т. е. определить характер линейной статистической связи между выходами.

Согласно (14.12.3) общее выражение для совместной ковариационной функции выходов имеет в рассматриваемом случае вид

$$B_{y_1 y_2}[\tau] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)}(x) \rangle \langle g^{(s)}(x) \rangle B_x^s[\tau]. \quad (14.12.5)$$

1) Пусть один из каналов является линейным: $f(x) = Ax$, а другой имеет произвольную нелинейность $g(x)$. Тогда в разложении (14.12.5) будет отличным от нуля только одно слагаемое:

$$B_{y_1 y_2}[\tau] = A \langle g'(x) \rangle B_x[\tau]. \quad (14.12.6)$$

Таким образом, совместная ковариационная функция выходов пропорциональна ковариационной функции входа. Эта ситуация типична для линейных каналов. В самом деле. Если вместо нелинейного канала с характеристикой $y = g(x)$ мы возьмем линейный канал с $y = \langle g'(x) \rangle x$, то от (14.12.5) мы придем опять к (14.12.6).

2) Пусть теперь один из каналов является квадратичным: $f(x) = Ax^2$, а второй обладает произвольной нелинейностью $g(x)$. Тогда (14.12.5) приводит нас (полагаем для простоты $\langle x \rangle = 0$) к

$$B_{y_1 y_2}[\tau] = A \langle g''(x) \rangle B_x^2[\tau].$$

Легко видеть, что точно такой же результат мы получим, если второй канал будет иметь квадратичную нелинейность $y = \langle g''(x) \rangle x^2/2$.

Из всего этого следует, что канал, обладающий «меньшей» нелинейностью, как бы заменяет второй канал более простым, статистически ему эквивалентным. Так, в первом случае линейный канал производит «статистическую линеаризацию» второго нелинейного канала, а во втором случае — «статистическую квадратизацию».

Из (14.12.3) вытекает следующая важная формула для гауссовой совокупности двух случайных стационарных процессов. Пусть $\Psi(y)$ — произвольная функция. Тогда [ср. с (3.4.3), (7.7.4)]

$$\langle x, \Psi(y_\tau) \rangle = \langle \Psi(y) \rangle m_x + \langle \Psi'(y) \rangle B_{xy}[\tau]. \quad (14.12.7)$$

Следовательно,

$$\langle x, \Psi(y_\tau) \rangle = \langle \Psi'(y) \rangle B_{xy}[\tau]. \quad (14.12.8)$$

14.13. Неявные нелинейные преобразования

1. В предыдущих параграфах мы рассмотрели нелинейные безынерционные преобразования $x \rightarrow y$, выполняемые по закону $y = F(x)$. Следует отметить, что не всегда имеется явное выражение выходной переменной через входную. В более общем виде нелинейное преобразование может быть представлено выражениями типа

$$y = F(x, y), \quad F_1(x, y) = c, \quad x = F_2(x, y). \quad (14.13.1)$$

Возникает задача о нахождении статистических свойств y при таком задании нелинейного преобразования.

Необходимо отметить, прежде всего, одно важное обстоятельство. Если входное распределение негауссово, то, как мы видели раньше, нахождение кумулянтов и кумулянтных функций выходной переменной $y = F(x)$ является с вычислительной точки зрения достаточно сложной задачей. И в то же время это вычисление становится сравнительно простым, если $x(t)$ гауссов процесс.

Однако если мы обратимся к преобразованиям типа (14.13.1), то при гауссовом x нахождение статистических характеристик выходной переменной y не становится более простой операцией, ибо при нелинейном преобразовании даже гауссовой переменной выходной процесс y всегда будет негауссовым и, следовательно, негауссовым будет один из аргументов функции $F(x, y)$. Таким образом, в случае неявных нелинейных преобразований предположение о гауссовости входной переменной нисколько не упрощает решение задачи.

2. Рассмотрим, например, безынерционное нелинейное преобразование $y = F(x, y)$ с функцией F , нелинейной по обоим аргументам. Если мы захотим вычислить первый выходной кумулянт, равный

$$\langle y \rangle = \langle F(x, y) \rangle, \quad (14.13.2)$$

то вследствие нелинейности F в правую часть (14.13.2) будут входить в общем случае все кумулянты κ_n^y , не говоря уже о смешанных кумулянтах $\kappa_{n,m}^{x,y}$. Поэтому для нахождения кумулянтов выходной переменной необходимо к уравнению (14.13.2) дописать бесконечное число других уравнений вида

$$\begin{aligned} \langle y, y \rangle &= \langle F(x, y), F(x, y) \rangle, \\ \langle x, y \rangle &= \langle x, F(x, y) \rangle, \\ \langle y, y, y \rangle &= \langle F, F, F \rangle, \\ \langle x, y, y \rangle &= \langle x, F, F \rangle, \\ &\dots \end{aligned}$$

Безнадежность нахождения всех кумулянтов κ_n^y в общем случае произвольной функции $F(x, y)$ очевидна.

Та же ситуация имеет место и при отыскании кумулянтных функций. Так, к уравнению

$$\langle y, y_\tau \rangle = \langle F(x, y), F(x_\tau, y_\tau) \rangle$$

на основании сказанного следует добавить последовательность уравнений типа

$$\begin{aligned} \langle x, y_\tau \rangle &= \langle x, F(x_\tau, y_\tau) \rangle, \\ \langle y, x_\tau \rangle &= \langle F(x, y), x_\tau \rangle, \\ &\dots \end{aligned}$$

Таким образом, задача точного отыскания статистических характеристик выходного случайного процесса при нелинейных безынерционных преобразованиях, заданных в неявном виде, является в общем случае чрезвычайно сложной.

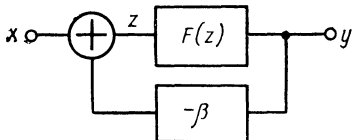


Рис. 14.12.

Если же не ставить вопроса о точном нахождении всех статистических характеристик выходной переменной, а решать задачу приближенно, взяв неизвестное распределение в виде модельного распределения, т. е. ограничившись конечным набором кумулянтов или

кумулянтных функций, то задача становится уже, в принципе, простой, поскольку цепочка уравнений как для кумулянтов, так и для кумулянтных функций становится конечной и замкнутой.

Наиболее просто задача будет решаться для гауссовой аппроксимации совокупности $\{x, y\}$. В этом случае достаточно рассмотреть лишь четыре уравнения для кумулянтных функций:

$$\langle y \rangle, \langle y, y_\tau \rangle, \langle x, y_\tau \rangle, \langle y, x_\tau \rangle.$$

Полагая $\tau = 0$, мы автоматически получим еще два уравнения для кумулянтов $\langle y, y \rangle, \langle x, y \rangle$. При этом, конечно, значения $\langle x \rangle, \langle x, x \rangle, \langle x, x_\tau \rangle$ предполагаются заданными.

3. Разберем теперь подробнее сравнительно простой случай неявного нелинейного преобразования

$$y = F(x - \beta y). \tag{14.13.3}$$

Подобное уравнение описывает систему, указанную на рис.14.12. Коэффициент β представляет отрицательную обратную связь, а функция F — безынерционный нелинейный элемент. Будем также предполагать $x = x(t)$ гауссовым стационарным случайным процессом с заданным средним значением m_x и ковариационной функцией $B_x[\tau]$.

Прежде всего отметим, что так как входной процесс является гауссовым, а нелинейное преобразование безынерционным, то кумулянтные функции выходной переменной зависят только от m_x и $B_x[\tau]$. Это значит, что для этих функций, в том числе и для ковариационной функции выхода, может быть записан ряд по степеням $B_x[\tau]$. Однако для записи такого ряда мы не можем непосредственно воспользоваться формулами (14.6.1), (14.6.2), ибо функция F зависит теперь еще и от выходной переменной. Вместе с этим вычисляя производные $y^{(k)}(x)$ по правилам, соответствующим неявным

функциям, мы, тем не менее, этот ковариационный ряд можем построить.

В самом деле, отмечая штрихом производную по аргументу, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F'}{1 + \beta F'} \quad , \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F''}{(1 + \beta F')^3} \quad ,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{F''' (1 + \beta F') - 3\beta (F'')^2}{(1 + \beta F')^5} \quad , \quad \dots$$

Подставляя эти производные в (14.6.2), получим ковариационный ряд

$$K_y[\tau] = \langle F \rangle^2 + \left\langle \frac{F'}{1 + \beta F'} \right\rangle B_x[\tau] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left\langle \frac{F''}{(1 + \beta F')^3} \right\rangle B_x^2[\tau] +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left\langle \frac{F''' (1 + \beta F') - 3\beta (F'')^2}{(1 + \beta F')^5} \right\rangle B_x^3[\tau] + \dots, \quad (14.13.4)$$

дающий *точное* выражение для корреляционной функции выхода. Из этой формулы отчетливо видно, что наличие обратной связи существенно усложняет вычисление $K_y[\tau]$. Если $\beta = 0$, то (14.13.4), как и должно быть, переходит в (14.6.2). Если же $\beta \neq 0$, то отыскание коэффициентов перед $B_x^k[\tau]$ весьма усложняется и главным образом не потому, что появляются дроби, а потому, что F зависит теперь от двух переменных: x и y , и чтобы эти коэффициенты вычислить, надо задаваться кумулянтами $\kappa_{r,s}^{x,y}$, которые нам неизвестны. А чтобы их получить, надо, в свою очередь, писать для них ряды по степеням D_x^k , коэффициенты при которых будут не проще, чем в (14.13.4). Поэтому, чтобы точно определить значение хотя бы одного коэффициента в (14.13.4), необходимо решать бесконечную последовательность уравнений для кумулянт совокупности $\{x, y\}$, как это выше и указывалось.

Таким образом, хотя мы и получили точную формулу для $K_y[\tau]$, тем не менее, вычислить корреляционную функцию точно мы не в состоянии. И поэтому остается единственная возможность — приближенное отыскание корреляционной функции, а также и среднего значения

$$m_y = \langle y \rangle = \langle F(x - \beta y) \rangle,$$

относительно которого также справедливо все сказанное.

Для приближенного отыскания первых двух кумулянтных функций выходной переменной (а только они и будут нас интересовать) можно применять различные приемы. Можно, например, принять гауссову аппроксимацию совокупности $\{x, y\}$. С другой стороны, можно пытаться найти точное решение при слабой связи ($\beta \ll 1$) и, наконец, при сильной связи ($\beta \gg 1$).

4. Рассмотрим гауссову аппроксимацию. Введем для удобства переменную $v = x - \beta y$, которая при этой аппроксимации также имеет гауссово распределение. Первые две кумулянтные функции этой переменной равны

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= \langle x \rangle - \beta \langle y \rangle, \\ \langle v, v_\tau \rangle &= \langle x, x_\tau \rangle - \beta \langle x, y_\tau \rangle - \beta \langle y, x_\tau \rangle + \\ &+ \beta^2 \langle y, y_\tau \rangle.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\langle x, v_\tau \rangle &= \langle x, x_\tau \rangle - \beta \langle x, y_\tau \rangle, \quad \langle x_\tau, v \rangle = \\ &= \langle x, x_\tau \rangle - \beta \langle y, x_\tau \rangle, \quad \langle y, v_\tau \rangle = \langle y, x_\tau \rangle - \\ &- \beta \langle y, y_\tau \rangle.\end{aligned}$$

Используя эти соотношения, а также (14.12.8), найдем

$$\begin{aligned}\langle y, y_\tau \rangle &= \langle y, F(v_\tau) \rangle = \langle F'(v) \rangle [\langle y, x_\tau \rangle - \beta \langle y, y_\tau \rangle], \\ \langle y, x_\tau \rangle &= \langle x_\tau, F(v) \rangle = \langle F'(v) \rangle [\langle x, x_\tau \rangle - \beta \langle y, x_\tau \rangle].\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\langle y, x_\tau \rangle &= \frac{\langle F'(v) \rangle}{1 + \beta \langle F'(v) \rangle} \langle x, x_\tau \rangle, \\ \langle x, y_\tau \rangle &= \frac{\langle F'(v) \rangle}{1 + \beta \langle F'(v) \rangle} \langle x, x_\tau \rangle, \\ \langle y, y_\tau \rangle &= \frac{\langle F'(v) \rangle}{1 + \beta \langle F'(v) \rangle} \langle y, x_\tau \rangle.\end{aligned}\tag{14.13.5}$$

Таким образом, для выходной переменной имеем окончательно

$$\begin{aligned}\langle y \rangle &= \langle F(v) \rangle, \\ \langle y, y_\tau \rangle &= \frac{\langle F'(v) \rangle^2}{[1 + \beta \langle F'(v) \rangle]^2} \langle x, x_\tau \rangle, \\ D_y &= \frac{\langle F'(v) \rangle^2}{[1 + \beta \langle F'(v) \rangle]^2} D_x.\end{aligned}\tag{14.13.6}$$

Итак, корреляционная функция выхода исследуемой нелинейной системы с обратной связью в гауссовом приближении оказалась равной

$$K_y[\tau] = \langle F(v) \rangle^2 + \frac{\langle F'(v) \rangle^2}{[1 + \beta \langle F'(v) \rangle]^2} B_x[\tau].\tag{14.13.7}$$

Сравним полученный результат с точным рядом (14.13.4). Прежде всего следует отметить, что мы пришли к некоторым «квазилинейным» соотношениям в том смысле, что ковариация выхода пропорциональна ковариации входного шума. Это полностью согласуется с тем, что мы аппроксимировали как вход, так и выход гауссовыми процессами, что было бы точным результатом только для линейной системы. Вместе с этим, приставка «квази» означает, что нелинейные эффекты, тем не менее, есть. В самом деле, как величина постоянной составляющей на выходе, так и коэффициент пропорцио-

нальности между ковариациями существенно зависят как от нелинейных свойств функции $F(v)$, так и от параметров входного шума, его среднего значения и дисперсии. Так, например, дисперсия выхода будет нелинейно зависеть от дисперсии входа. Другими словами, мы получили как бы линейность системы по отношению к преобразованию формы ковариационной функции шума и нелинейность по отношению к преобразованию среднего и дисперсии.

Все это справедливо и для взаимосвязи спектров, которая получается преобразованием Фурье (14.13.7):

$$S_y(\omega) = \langle F(v) \rangle^2 \delta(\omega) + \frac{\langle F'(v) \rangle^2}{[1 + \beta \langle F'(v) \rangle]^2} G_x(\omega).$$

5. Рассмотрим приближение слабой связи, при котором коэффициент обратной связи достаточно мал, так что

$$F(x - \beta y) \simeq F(x) - \beta y F'(x).$$

В этом случае неявное нелинейное преобразование (14.13.3) принимает вид явного преобразования

$$y = \frac{F(x)}{1 + \beta F'(x)} \equiv f(x),$$

к которому при гауссовом $x(t)$ могут быть применены методы § 14.10. Так, среднее значение выходной переменной равно

$$m_y = \langle y \rangle = \left\langle \frac{F(x)}{1 + \beta F'(x)} \right\rangle,$$

где правая часть зависит только от m_x и D_x , а ковариационная функция выхода определяется ковариационным рядом

$$B_y[\tau] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)}(x) \rangle^2 B_x^s[\tau].$$

коэффициенты которого также зависят только от m_x и D_x .

Выходной спектр в случае слабой обратной связи имеет вид

$$S_y(\omega) = \delta(\omega) \left\{ \langle f(x) \rangle^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)}(x) \rangle^2 [\otimes G_x(\omega)]^s \right\}.$$

Если же коэффициент обратной связи β настолько мал, что $\beta F'(x) \ll 1$, то

$$f(x) = F(x)[1 - \beta F'(x)] \simeq F(x)$$

и обратная связь не играет практически никакой роли.

6. Обратимся, наконец, к приближению сильной связи. Предположим, что существует однозначная обратная функция $F^{-1}(y)$. Тогда

$$x = \beta y + F^{-1}(y).$$

Пусть β настолько велико, что

$$\beta y \gg F^{-1}(y).$$

В этом случае, очевидно, разность $v = x - \beta y$, действующая на нелинейный элемент, мала. Поэтому можно записать

$$y = F(v) = F(0) + vF'(0).$$

Тогда

$$y = [F(0) + xF'(0)]/[1 + \beta F'(0)] \quad (14.13.8)$$

и мы приходим к *линейному* преобразованию. Таким образом, сильная обратная отрицательная связь, охватывающая нелинейный элемент, «заставляет» его работать в нулевой точке и, если $F'(0) \neq 0$, линеаризует его.

Если выход нелинейного элемента равен нулю при нулевом входе и $\beta F'(0) \gg 1$, то из (14.13.8) следует, что $y = x/\beta$.

Таким образом, в этом случае в приближении сильной обратной связи нелинейность элемента практически не сказывается, и связь характеристик выхода с характеристиками входа определяется линейными преобразованиями

$$\langle y \rangle = \frac{\langle x \rangle}{\beta}, \quad K_y[\tau] = \frac{K_x[\tau]}{\beta^2}, \quad S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\beta^2}.$$

14.14. Безынерционное детектирование с обратной связью

1. Рассмотрим в качестве конкретного примера неявных нелинейных преобразований детектирование случайного стационарного процесса с учетом обратной связи. Вообще говоря, следует сказать,

что всякое реальное детектирование, как правило, происходит с обратной связью. В самом деле, рассмотрим, например, схему обычного безынерционного (отсутствует емкость) детектора, изображенную на рис. 14.13. Эта схема описывается уравнениями

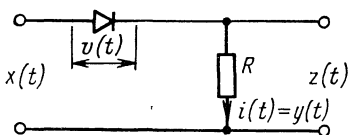


Рис. 14.13.

$$x(t) = v(t) + z(t), \quad z(t) = i(t)R, \quad i(t) = F(v), \quad (14.14.1)$$

где $F(v)$ — нелинейная функция, представляющая вольт-амперную характеристику диода. Из (14.14.1) получаем следующее уравнение для напряжения на выходе детектора: $z = RF(x - z)$.

Это выражение полностью соответствует уравнению неявного нелинейного преобразования (14.13.3). Выходной переменной $z(t)$ соответствует значение коэффициента обратной связи, равное единице, поскольку на диод попадает разность между входным и выходным напряжениями. Тем самым присутствие сопротивления на-

грузки обеспечивает обратную связь, которая весьма существенно влияет на работу детектора.

Чтобы наиболее полно учесть роль обратной связи, возьмем в качестве выходной координаты ток через нагрузочное сопротивление: $y(t) \equiv i(t)$. Тогда $y = F(x - \beta y)$, где $\beta = R$. В таких переменных роль сопротивления нагрузки как обратной связи видна наиболее отчетливо.

2. Выберем характеристику диода в виде

$$i = F(v) = A(e^{bv} - 1)$$

и воспользуемся результатами предыдущего параграфа, рассматривая гауссово приближение. Пусть также $\langle x(t) \rangle = 0$.

Зависимость постоянной составляющей и дисперсии выходной переменной от дисперсии входа D_x определяется первым и третьим уравнениями (14.13.6):

$$m_y = \langle F \rangle, \quad D_y = \langle F' \rangle^2 [1 + \beta \langle F' \rangle]^{-2} D_x, \quad (14.14.2)$$

где

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= A [\langle e^{bv} \rangle - 1], \quad \langle F' \rangle = Ab \langle e^{bv} \rangle = \\ &= [\langle F \rangle + A]b. \end{aligned} \quad (14.14.3)$$

Поскольку v также гауссово, то

$$\langle e^{bv} \rangle = \exp(b \langle v \rangle + 0,5b^2 D_v),$$

где, как очевидно,

$$\langle v \rangle = -\beta \langle y \rangle, \quad D_v = [1 + \beta \langle F' \rangle]^{-2} D_x.$$

Следовательно, для m_y и D_y мы получаем два трансцендентных уравнения. По этой причине искомые зависимости $m_y = m_y(D_x)$, $D_y = D_y(D_x)$ проще всего изобразить графически.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} s &\equiv 0,5b^2 D_x, \quad \alpha \equiv bA\beta, \quad m \equiv b\beta m_y, \quad D \equiv 0,5b^2\beta^2 D_y, \\ \varepsilon &\equiv \beta \langle F' \rangle. \end{aligned} \quad (14.14.4)$$

Первая переменная s является безразмерной дисперсией входного случайного процесса, второй параметр α характеризует нелинейный элемент вместе со степенью обратной связи. Можно показать, что $Ab = 1/R_i$, где R_i есть внутреннее сопротивление диода в рабочей точке $v = 0$. По этой причине коэффициент $\alpha = R/R_i$ можно считать безразмерным коэффициентом обратной связи. Третья и четвертая переменные являются безразмерным средним значением и дисперсией выходной переменной или, лучше сказать, средним значением и дисперсией безразмерной выходной переменной, равной $\eta = b\beta y$. Последний параметр ε является промежуточной переменной.

Итак, необходимо отыскать зависимости $m = m(\alpha, s)$, $D = D(\alpha, s)$.

Из (14.14.2) и (14.14.3) следует

$$m = \varepsilon(\alpha, s) - \alpha, \quad D = \varepsilon^2(\alpha, s)s[1 + \varepsilon(\alpha, s)]^{-2}, \quad (14.14.5)$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, s)$ определяется трансцендентным уравнением

$$\varepsilon = \alpha \exp\left(\alpha - \varepsilon + \frac{s}{[1 + \varepsilon]^2}\right). \quad (14.14.6)$$

На рис. 14.14 представлены зависимости ε от s для трех значений α . С помощью этих кривых и (14.14.5) нетрудно построить и искомые зависимости m и D от α и s . Графики функции $D = D(\alpha, s)$ приведены на рис. 14.15 для тех же значений α .

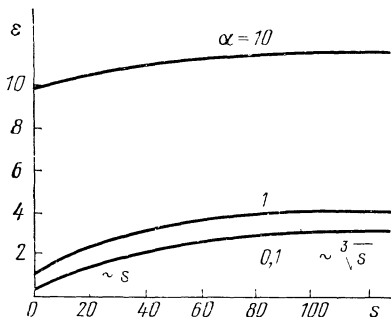


Рис. 14.14.

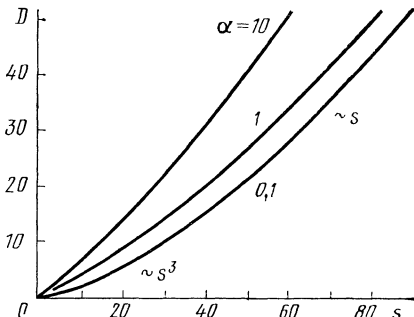


Рис. 14.15.

3. Анализ графиков показывает, что при малой дисперсии входного шума $m_y \sim D_x$, $D_y \sim D_x^3$, а при большой $m_y \sim \sqrt[3]{D_x}$, $D_y \sim \sim D_x$. Эти закономерности становятся понятными, если учесть, что при малой мощности входного шума весь эффект детектирования обязан только квадратичному члену в разложении вольт-амперной характеристики диода, а при больших мощностях «в игру вступают» все нелинейности.

Поскольку в гауссовом приближении ковариационные функции пропорциональны

$$B_\eta[\tau] = \varepsilon^2 [1 + \varepsilon]^{-2} B_\xi[\tau]$$

(здесь $\xi = bx$ — безразмерная входная переменная), то мы имеем и пропорциональность спектров

$$S_\eta(\omega) = m^2 \delta(\omega) + \frac{\varepsilon^2}{[1 + \varepsilon]^2} S_\xi(\omega). \quad (14.14.7)$$

Итак, в гауссовом приближении нелинейность системы детектирования сказалась на существовании на выходе постоянного тока и на нелинейной зависимости мощности выхода от мощности входа.

Оценивая роль обратной связи в статистических характеристиках выходного шума, можно утверждать следующее.

Если $\alpha \ll 1$, то влияние обратной связи весьма незначительно и мы приходим к обычному нелинейному безынерционному преобразованию. В частности, в этом случае большую роль играет эффект расширения полосы спектра. Это связано с тем, что при малой обратной связи почти все входное напряжение попадает на детектор и, следовательно, подвергается нелинейному преобразованию.

При возрастании обратной связи на детектор начинает поступать меньшая доля входного напряжения. Вследствие этого падает выпрямленный ток и несколько уменьшается полоса выходного шума за счет того, что часть шума сохранила первоначальную полосу.

При дальнейшем росте обратной связи вклад «продетектированных» шумов становится все меньше и меньше, величина постоянного тока на выходе падает и основную роль начинает играть прямое прохождение шума.

Наконец, при $\alpha \gg 1$ детектируется лишь незначительная часть входного шума и мы имеем почти линейную систему. Выпрямленный ток весьма мал, а выходной шум практически совпадает с входным. Поэтому полоса выходного шума равна полосе входного спектра.

Глава 15

ИНЕРЦИОННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕЛЫХ ШУМОВ

15.1. Постановка задачи. Метод исследования

1. Всякая реальная динамическая система, будь то линейная или нелинейная, является инерционной. Обратимся, например, к схеме реального детектора (рис. 15.1). Напряжение на выходе системы подчиняется уравнению

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{RC} + \frac{1}{C} F(u-x), \quad (15.1.1)$$

где $F(v)$ — вольт-амперная характеристика диода, а $u = u(t)$ — заданный входной шум. Отсюда видно, что связь между входной и выходной переменными является не только нелинейной, но и инерционной, и эту инерционность мы должны теперь учитывать.

Если отвлечься от того, что переменные x и u являются случайными процессами, то (15.1.1) есть обычное дифференциальное уравнение первого порядка. Вся трудность заключается в том, что для решения таких уравнений с произвольной функцией $F(u-x)$ не существует каких-либо регулярных количественных методов. Практически чаще всего каждое конкретное нелинейное уравнение при-

ходится решать своими методами. И эта сложность ситуации усугубляется, если уравнение является стохастическим. Здесь нет возможности получить решение в виде зависимости $x(t)$ как функции от $u(t)$ и искать статистические свойства x непосредственно через статистические свойства u . По этой причине единственное, на что здесь можно рассчитывать, — это составление уравнений для статистических характеристик случайных процессов $x(t)$ и $u(t)$ и их решение теми или иными точными или приближенными методами.

2. Итак, рассмотрим общий вид нелинейного дифференциального уравнения первого порядка, связывающего выходной $x(t)$ и входной $u(t)$ случайные процессы:

$$dx/dt = f[x, t, u]. \quad (15.1.2)$$

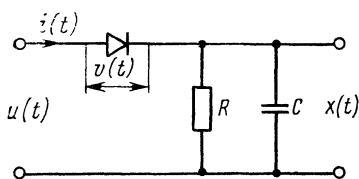


Рис. 15.1.

Если $u(t)$ есть произвольный случайный процесс, задача отыскания статистических характеристик выходной переменной $x(t)$ становится наиболее сложной. В этом случае кумулянтный подход также может быть эффективен, однако для этого требуется введение так называемых *стохастических функций*

(см., например, [65, 66]) и разработка техники их кумулянтного анализа [31]. Хотя методы этого анализа близки к предмету настоящей книги, мы здесь не будем их касаться.

Если же $u(t)$ является совершенно случайным или марковским процессом, или, наконец, компонентой марковского процесса, чем мы в дальнейшем и ограничимся, то для решения поставленной задачи можно привлечь аппарат теории марковских процессов, развитый в гл. 10, и записать дифференциальные уравнения для кумулянтов и кумулянтных функций искомого случайного процесса $x(t)$, поскольку в этом случае он сам будет или марковским процессом, или его компонентой.

В этой главе мы ограничимся совершенно случайным процессом $u(t) = \xi(t)$, приводящим к марковскому процессу $x(t)$, т. е. будем рассматривать инерционное нелинейное преобразование *белого* шума. Функцию f будем предполагать при этом гладкой по всем аргументам.

3. При обращении к реальным системам мы никогда не получим в качестве $\xi(t)$ настоящего совершенно случайного процесса, все времена статистической зависимости которого равны нулю. Любой реальный процесс, каким бы быстрым его нельзя было считать, всегда имеет отличные от нуля значения и времени корреляции, и времена статистической зависимости высших порядков.

Вместе с этим представляется, что такой широкополосный процесс можно аппроксимировать совершенно случайным процессом, если система является достаточно инерционной. Однако все дело в том, что значит «достаточно инерционна». Очевидно, надо ввести

постоянную времени системы τ_c и сравнить ее с τ_ξ — максимальным временем статистической зависимости случайного процесса. Если τ_c будет много больше τ_ξ , то тогда можно, в принципе, заменить $\xi(t)$ совершенно случайным процессом. Однако при произвольной нелинейной функции $f[x, t, \xi(t)]$ и произвольном $\xi(t)$ мы не можем а priori определить τ_c . Чтобы найти эту постоянную времени, надо по существу решить сначала поставленную задачу и затем уже, анализируя полученное значение τ_c , которое зависит от параметров $\xi(t)$, выяснить условия, налагаемые на τ_ξ .

Таким образом, мы должны действовать следующим образом. Предполагая $\tau_\xi \ll \tau_c$, найти статистические характеристики выходной переменной x и в том числе τ_c , а затем уже проверить, не противоречит ли полученное значение τ_c принятому предположению. Это значит, что мы сначала должны решить задачу о воздействии *гладкого** шума на рассматриваемую систему, а затем уже выяснить условия, при которых гладкий шум может быть заменен совершенно случайным процессом. Откладывая выяснение этих условий до следующей главы, будем считать здесь их выполненными и рассматривать $\xi(t)$ как совершенно случайный процесс с нулевым средним значением.

4. Обычно, когда говорят о широкополосном случайном процессе $\xi(t)$, имеют в виду, как правило, спектр мощности и соответственно малость его времени корреляции. Однако малость времени корреляции не означает малости времен статистической зависимости высших порядков, что только и может определить процесс $\xi(t)$ как приближенно совершенно случайный. На языке спектров это означает, что не только спектр мощности — спектр второго порядка — должен быть широкополосным (по сравнению с полосой системы $\Pi \equiv \tau_c^{-1}$), но широкополосными должны быть также и спектры высших порядков, в принципе (при произвольной функции $f[x, t, \xi(t)]$), *все* спектры высших порядков. Вместе с этим, конечно, если процесс $\xi(t)$ гауссов, то достаточно лишь малости времени корреляции и широкополосного спектра мощности.

5. Итак, мы имеем марковский процесс, описываемый уравнением (15.1.2). Используя результаты гл. 10, можно написать для этого марковского процесса дифференциальные уравнения его кумулянтов и кумулянтных функций.

Эти уравнения для функции $f[x, t, \xi]$, нелинейной по x , являются бесконечной цепочкой зацепляющихся уравнений (нелинейных для кумулянтов и линейных для кумулянтных функций). Это значит, что для точного вычисления хотя бы первых кумулянтов и кумулянтных функций необходимо решить всю бесконечную последовательность уравнений, что невозможно. Следовательно, неизбежен приближенный анализ, при котором полагаются равными нулю все

* Под гладким шумом будем понимать в дальнейшем шум, спектры которого обладают конечной полосой.

кумулянты и кумулянтные функции, начиная с какого-либо порядка.

Это, в свою очередь, означает, что при анализе марковского процесса, заданного дифференциальным уравнением (15.1.2), мы будем ограничиваться *модельными* приближениями. Для рассматриваемых далее конкретных примеров будем использовать главным образом гауссово и эксцессное приближения.

15.2. Гауссово приближение

1. В этом параграфе мы проанализируем эволюцию кумулянтов и кумулянтных функций процесса $x(t)$, заданного уравнением

$$dx/dt = f[x, t, \xi], \quad (15.2.1)$$

ограничившись гауссовым приближением, т. е. считая отличными от нуля только первые два кумулянта

$$\langle x \rangle = \kappa_1(t) \equiv m_t, \quad \langle x, x \rangle \equiv \kappa_2(t) \equiv D_t$$

и кумулянтную функцию $\kappa_2(t_1, t_2) \equiv B_x[t_1, t_2]$.

Уравнения эволюции первых двух кумулянтов согласно (10.6.9), (10.6.10) имеют вид

$$\dot{m}_t = \langle K_1(x, t) \rangle_r,$$

$$\dot{D}_t = 2 \langle x, K_1(x, t) \rangle_r + \langle K_2(x, t) \rangle_r,$$

где усреднение $\langle \dots \rangle_r$ производится в предположении гауссовости x . Используя формулу (4.7.8), получим более удобный вид уравнений эволюции среднего и дисперсии:

$$\dot{m}_t = \langle K_1(x, t) \rangle_r,$$

$$\dot{D}_t = 2 \langle K'_1(x, t) \rangle_r D_t + \langle K_2(x, t) \rangle_r. \quad (15.2.2)$$

Здесь штрих соответствует дифференцированию по x .

Отсутствие в (15.2.2) высших кинетических коэффициентов означает, что в гауссовом приближении марковский процесс считается также и непрерывным. Поэтому нам необходимо знать только первые два кинетических коэффициента. Это значит, что мы можем полагать $\xi(t)$ гауссовым дельта-коррелированным процессом, характеризваемым одним коэффициентом интенсивности $\mathcal{D}$.

Если кинетические коэффициенты не зависят от времени: $K_i(x, t) = K_i(x)$ ($i = 1, 2$), а этим случаем мы и ограничимся далее, и с течением времени переходные процессы, связанные с произвольными начальными условиями, заканчиваются, то мы придем к стационарному процессу, обладающему установившимися значениями среднего и дисперсии:

$$m = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t, \quad D = \lim_{t \rightarrow \infty} D_t.$$

Поскольку средние $\langle \dots \rangle_r$ зависят только от m_t и D_t , то удобно для дальнейшего ввести специальные обозначения:

$$-\langle K_1(x) \rangle_r \equiv F(m_t, D_t),$$

$$-\langle K'_1(x) \rangle_r \equiv \Pi(m_t, D_t),$$

$$\langle K_2(x) \rangle_r \equiv H(m_t, D_t).$$

С учетом этих обозначений получаем следующие кинетические уравнения для среднего и дисперсии негауссового марковского процесса в гауссовом приближении:

$$\begin{aligned} \dot{m}_t &= -F(m_t, D_t), \\ \dot{D}_t &= -2D_t \Pi(m_t, D_t) + H(m_t, D_t). \end{aligned} \quad (15.2.3)$$

Установившиеся значения кумулянтов находятся из уравнений

$$F(m, D) = 0, \quad D = H(m, D)/2\Pi(m, D). \quad (15.2.4)$$

2. Для исчерпывающего описания стационарного марковского процесса необходимо еще определить ковариационную функцию $B_x[\tau]$. Согласно (10.8.7) уравнение для ковариационной функции в гауссовом приближении имеет вид

$$\frac{dB_x[\tau]}{d\tau} = -\Pi(m, D) B_x[\tau]. \quad (15.2.5)$$

Решая уравнение (15.2.5) при начальном условии $B_x[0] = D$, приходим к следующему виду ковариационной функции ($\tau > 0$):

$$B_x[\tau] = D e^{-\Pi(m, D) \tau}. \quad (15.2.6)$$

Итак, мы получили исчерпывающую информацию о стационарном марковском процессе в гауссовом приближении. Его среднее значение и дисперсия определяются уравнениями (15.2.4); он имеет экспоненциальную ковариационную функцию; его время корреляции и энергетическая полоса спектра равны соответственно

$$\tau_k = \frac{1}{\Pi(m, D)}, \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{2} \Pi(m, D), \quad (15.2.7)$$

в то время как спектральная плотность равна

$$S_x(\omega) = m^2 \delta(\omega) + \frac{D}{\pi} \frac{\Pi(m, D)}{\Pi^2(m, D) + \omega^2}. \quad (15.2.8)$$

Поскольку m и D зависят от $\mathcal{D}$ — интенсивности воздействующего совершенно случайного процесса, то от $\mathcal{D}$ будут зависеть и время корреляции, и полоса марковского процесса.

Эти зависимости

$$\tau_k = \tau_k(\mathcal{D}), \quad \Omega_0 = \Omega_0(\mathcal{D}) \quad (15.2.9)$$

специфичны именно для нелинейного инерционного преобразования $\xi(t) \rightarrow x(t)$. По существу вся нелинейность системы (15.2.1) сказывается в рассматриваемом приближении именно в зависимос-

тах (15.2.9), поскольку вид ковариационной функции (15.2.6) характерен для линейной системы.

3. Последнее обстоятельство наводит на мысль о том, что выбор гауссова приближения для описания марковского процесса, заданного уравнением (15.2.1), эквивалентен замене рассматриваемой нелинейной системы некоторой линеаризованной системой, т. е. замене нелинейной функции $f[x, t, \xi]$ некоторой ей эквивалентной [с точки зрения полученных результатов (15.2.6)—(15.2.9)] линейной функцией.

Не представляет особого труда найти эту эквивалентную линейную систему. Исходя из (15.2.5), легко сообразить, что такая система описывается уравнением

$$dx/dt = -\Pi(m, D)x + B(m, D)\xi(t), \quad (15.2.10)$$

где $B(m, D)$ — некоторый коэффициент, зависящий в общем случае от среднего и дисперсии, а $\xi(t)$ — тот же самый гауссов дельта-коррелированный процесс с интенсивностью $\mathcal{D}$.

Вообще говоря, систему (15.2.10) следует полагать нелинейной, ибо ее параметры $\Pi(m, D)$ и $B(m, D)$ зависят от характеристик исследуемого случайного процесса $x(t)$. Вместе с этим, эту нелинейность можно считать в определенном смысле «инерционной» нелинейностью или, лучше сказать, «усредненной» нелинейностью, так как параметры Π, B зависят не от мгновенных, а от усредненных значений случайного процесса $x(t)$. В то же время, если бы процесс $x(t)$ был эргодическим, мы, действительно, имели бы «чистый» случай инерционной нелинейности.

Таким образом, гауссову приближению соответствует замена нелинейной системы линейной системой с усредненной нелинейностью.

Эквивалентность систем (15.2.1) и (15.2.10) позволяет без труда определить коэффициент $B(m, D)$. В самом деле, из (15.2.10) элементарно следует, что спектральная плотность флуктуационной части процесса $x(t)$ равна

$$G_x(\omega) = \frac{B^2(m, D) G_\xi(\omega)}{\Pi^2(m, D) + \omega^2},$$

где в силу дельта-коррелированности шума $\xi(t)$ его спектральная плотность равна $G_\xi(\omega) = \mathcal{D}/2\pi$. Сравнивая это выражение с (15.2.8) и учитывая второе уравнение (15.2.4), найдем, что

$$B^2(m, D) = 2D\Pi(m, D)/\mathcal{D} = H(m, D)/\mathcal{D}. \quad (15.2.11)$$

Заметим также, что на основании (15.2.7) и (15.2.11) для энергетической полосы спектра марковского процесса можно записать другое, более удобное выражение

$$\Omega_0 = \pi H(m, D)/4D. \quad (15.2.12)$$

4. Рассмотрим в качестве примера часто встречающееся в приложениях уравнение

$$dx/dt = -a(x) + \xi(t), \quad (15.2.13)$$

где $\xi(t)$, как мы уже знаем, достаточно в рассматриваемом приближении считать гауссовым дельта-коррелированным процессом с интенсивностью $\mathcal{D}$.

В этом случае $f[x, t, \xi] = -a(x) + \xi$ и первые два кинетических коэффициента марковского процесса $x(t)$ согласно (III.5) равны $K_1(x) = -a(x)$, $K_2(x) = \mathcal{D}$. Соответственно

$$\begin{aligned} \Pi(m, D) &= \langle a'(x) \rangle_r, & F(m, D) &= \langle a(x) \rangle_r, \\ B(m, D) &= 1, & H(m, D) &= \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (15.2.14)$$

а процесс установления стационарных значений среднего и дисперсии марковского процесса $x(t)$ описывается согласно (15.2.3) уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{m}_t &= -\langle a(x) \rangle_r, \\ \dot{D}_t &= -2D_t \langle a'(x) \rangle_r + \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (15.2.15)$$

Установившиеся значения кумулянтов определяются выражениями

$$\langle a(x) \rangle_r = 0, \quad D = \mathcal{D}/2\langle a'(x) \rangle_r.$$

Отсюда находятся зависимости $m = m(\mathcal{D})$, $D = D(\mathcal{D})$, позволяющие с помощью (15.2.7), (15.2.12) представить полосы спектра исследуемого случайного процесса в следующем виде:

$$\Pi = \mathcal{D}/2D(\mathcal{D}), \quad \Omega_0 = \pi\mathcal{D}/4D(\mathcal{D}). \quad (15.2.16)$$

Таким образом, полоса выходного процесса будет возрастать или уменьшаться с ростом интенсивности воздействующего шума $\mathcal{D}$ в зависимости от того, как быстро растет с ростом $\mathcal{D}$ дисперсия выхода.

Поскольку полоса входного спектра неограничена, то $\Pi(m, D)$ можно рассматривать теперь и как *полосу системы*, т. е. как полосу изучаемой нелинейной системы (15.2.1), определенную в гауссовом приближении. Согласно (15.2.16), эта полоса существеннейшим образом зависит от интенсивности воздействующего на эту систему шума, что, конечно, является следствием нелинейности системы.

Как будет показано далее, определение полосы системы как $\Pi \equiv -\langle K'_1(x) \rangle$ сохраняет свой смысл и при учете высших негауссовых приближений. Разумеется, в этих случаях значение полосы системы из-за негауссовости x будет другим.

5. В заключение настоящего параграфа заметим следующее. Как можно показать (см., например, [22, 23, 67]), использование гауссова приближения эквивалентно применению так называемого *метода статистической линеаризации* [68, 69], находящего широкое применение при анализе статистических характеристик различных нелинейных динамических систем.

15.3. Эксцессное приближение

1. Рассмотрим опять дифференциальное уравнение (15.2.1) с совершенно случайным стационарным процессом $\xi(t)$ и будем теперь предполагать, что у марковского процесса $x = x(t)$ отличны от тождественного нуля первые четыре кумулянта

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= m(t), & \langle x, x \rangle &= D(t), & \langle x, x, x \rangle &= \kappa_3(t), \\ \langle x, x, x, x \rangle &= \kappa_4(t)\end{aligned}$$

и соответствующие кумулянтные функции.

Уравнения эволюции этих кумулянтов определяются формулами (10.6.9) — (10.6.12):

$$\begin{aligned}\dot{m}(t) &= \langle K_1(x, t) \rangle_\circ, \\ \dot{D}(t) &= 2\langle x, K_1(x, t) \rangle_\circ + \langle K_2(x, t) \rangle_\circ, \\ \dot{\kappa}_3(t) &= 3\langle x, x, K_1(x, t) \rangle_\circ + 3\langle x, K_2(x, t) \rangle_\circ + \\ &+ \langle K_3(x, t) \rangle_\circ, \\ \dot{\kappa}_4(t) &= 4\langle x, x, x, K_1(x, t) \rangle_\circ + 6\langle x, x, K_2(x, t) \rangle_\circ + \\ &+ 4\langle x, K_3(x, t) \rangle_\circ + \langle K_4(x, t) \rangle_\circ.\end{aligned}\quad (15.3.1)$$

Статистическое усреднение $\langle \dots \rangle_\circ$ приводится в эксцессном приближении. В этом параграфе мы будем иметь дело только с таким усреднением. Поэтому для простоты всюду будем записывать $\langle \dots \rangle$ вместо $\langle \dots \rangle_\circ$.

Из (15.3.1) следует, что нам необходимо знать теперь уже четыре первых кинетических коэффициента. Для этого достаточно совершенно случайный процесс $\xi(t)$ считать *эксцессным* процессом с коэффициентами интенсивности $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ и $\mathcal{I}_4$ (как всегда, мы полагаем $\langle \xi(t) \rangle = 0$).

Выражая правые части (15.3.1) через кумулянты и решая полученные для них кинетические уравнения при заданных начальных условиях, мы найдем временную эволюцию кумулянтов негауссова марковского процесса $x(t)$ в эксцессном приближении.

2. Если кинетические коэффициенты не зависят от времени, а переходные процессы заканчиваются, то кумулянты приобретают установившиеся значения m , D , κ_3 , κ_4 , которые могут быть найдены или из системы уравнений

$$\begin{aligned}\langle K_1(x) \rangle &= 0, \\ 2\langle x, K_1(x) \rangle + \langle K_2(x) \rangle &= 0, \\ 3\langle x, x, K_1(x) \rangle + 3\langle x, K_2(x) \rangle + \langle K_3(x) \rangle &= 0, \\ 4\langle x, x, x, K_1(x) \rangle + 6\langle x, x, K_2(x) \rangle + 4\langle x, K_3(x) \rangle + \\ + \langle K_4(x) \rangle &= 0\end{aligned}\quad (15.3.2)$$

или из эквивалентной ей системы [см. (10.6.23)]

$$\begin{aligned}\langle K_1(x) \rangle &= 0, \\ 2\langle xK_1(x) \rangle + \langle K_2(x) \rangle &= 0, \\ 3\langle x^2K_1(x) \rangle + 3\langle xK_2(x) \rangle + \langle K_3(x) \rangle &= 0,\end{aligned}$$

$$4\langle x^3 K_1(x) \rangle + 6\langle x^2 K_2(x) \rangle + 4\langle x K_3(x) \rangle + \langle K_4(x) \rangle = 0.$$

3. Кумулянтные функции стационарного марковского процесса $x(t)$

$$\kappa_2(0, \tau), \quad \kappa_3(0, \tau, \tau), \quad \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau)$$

в эксцессном приближении согласно (10.8.7), (10.8.9), (10.8.11) определяются линейными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_2(0, \tau)}{d\tau} &= A_{22} \kappa_2(0, \tau) + A_{23} \kappa_3(0, \tau, \tau) + A_{24} \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau), \\ \frac{d\kappa_3(0, \tau, \tau)}{d\tau} &= A_{32} \kappa_2(0, \tau) + A_{33} \kappa_3(0, \tau, \tau) + A_{34} \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau), \\ \frac{d\kappa_4(0, \tau, \tau, \tau)}{d\tau} &= A_{42} \kappa_2(0, \tau) + A_{43} \kappa_3(0, \tau, \tau) + A_{44} \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau), \end{aligned} \quad (15.3.3)$$

которые следует решать при начальных условиях

$$\kappa_2(0, 0) = \kappa_2, \quad \kappa_3(0, 0, 0) = \kappa_3, \quad \kappa_4(0, 0, 0, 0) = \kappa_4$$

и в которых коэффициенты $A_{ij} = A_{ij}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ определяются выражениями ($K_i(x)$ записываем просто как K_i)

$$\begin{aligned} A_{22} &= \langle K'_1 \rangle, \quad A_{23} = \frac{1}{2!} \langle K''_1 \rangle, \quad A_{24} = \frac{1}{3!} \langle K'''_1 \rangle, \\ A_{32} &= 2 \langle x, K'_1 \rangle + \langle K'_2 \rangle, \quad A_{33} = \frac{1}{2!} [4 \langle K'_1 \rangle + \\ &+ 2 \langle x, K''_1 \rangle + \langle K''_2 \rangle], \\ A_{34} &= \frac{1}{3!} [6 \langle K''_1 \rangle + 2 \langle x, K'''_1 \rangle + \langle K'''_2 \rangle], \\ A_{42} &= 3 \langle x, x, K'_1 \rangle + 3 \langle x, K'_2 \rangle + \langle K'_3 \rangle, \\ A_{43} &= \frac{1}{2!} [12 \langle x, K'_1 \rangle + 3 \langle x, x, K''_1 \rangle + 6 \langle K'_2 \rangle + \\ &+ 3 \langle x, K''_2 \rangle + \langle K''_3 \rangle], \\ A_{44} &= \frac{1}{3!} [18 \langle K'_1 \rangle + 18 \langle x, K''_1 \rangle + 3 \langle x, x, K'''_1 \rangle + \\ &+ 9 \langle K''_2 \rangle + 3 \langle x, K'''_2 \rangle + \langle K'''_3 \rangle]. \end{aligned} \quad (15.3.4)$$

Если λ_k — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{22} + \lambda & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} + \lambda & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

все различны, то ковариационные функции равны ($\tau > 0$)

$$\begin{aligned}\kappa_2(0, \tau) &= B_{21} e^{-\lambda_1 \tau} + B_{22} e^{-\lambda_2 \tau} + B_{23} e^{-\lambda_3 \tau}, \\ \kappa_3(0, \tau) &= B_{31} e^{-\lambda_1 \tau} + B_{32} e^{-\lambda_2 \tau} + B_{33} e^{-\lambda_3 \tau}, \\ \kappa_4(0, \tau) &= B_{41} e^{-\lambda_1 \tau} + B_{42} e^{-\lambda_2 \tau} + B_{43} e^{-\lambda_3 \tau}.\end{aligned}\quad (15.3.5)$$

Коэффициенты B_{ij} находятся из начальных условий и определяются следующей системой уравнений [см. (10.8.16)] ($s = 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned}B_{s1} + B_{s2} + B_{s3} &= \kappa_s, \\ \lambda_1 B_{s1} + \lambda_2 B_{s2} + \lambda_3 B_{s3} &= -A_{s2} \kappa_2 - A_{s3} \kappa_3 - A_{s4} \kappa_4, \\ \lambda_1^2 B_{s1} + \lambda_2^2 B_{s2} + \lambda_3^2 B_{s3} &= \sum_{l=2}^4 \sum_{p=2}^4 A_{sl} A_{lp} \kappa_p,\end{aligned}\quad (15.3.6)$$

определитель которой равен

$$\Delta = (\lambda_2 - \lambda_1)^3 (\lambda_3 - \lambda_1)^3 (\lambda_3 - \lambda_2)^3.$$

Таким образом, в эксцессном приближении ($\tau > 0$)

$$\begin{aligned}\kappa_s(0, \tau, \dots, \tau) &= \sum_{n=1}^3 B_{sn} (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \times \\ &\times \exp[-\lambda_n (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \tau].\end{aligned}$$

Времена корреляции $\tau_n = 1/\lambda_n$ зависят от первых четырех кумулянтов и в конечном счете сложным образом зависят от $\mathcal{D}_k$ — коэффициентов интенсивности совершенно случайного процесса.

4. Определив вид ковариационной функции, легко записать и спектральную плотность марковского процесса в эксцессном приближении:

$$\begin{aligned}S_x(\omega) &= m_x^2 \delta(\omega) + \frac{B_{21}}{\pi} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \omega^2} + \\ &+ \frac{B_{22}}{\pi} \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 + \omega^2} + \frac{B_{23}}{\pi} \frac{\lambda_3}{\lambda_3^2 + \omega^2}.\end{aligned}\quad (15.3.7)$$

Сравнивая это выражение с (15.2.8), видим, что эксцессное приближение привело к более сложному виду спектра. Суперпозиция трех резонансных кривых, параметры которых различным образом зависят от коэффициентов интенсивности воздействующего шума, может давать в результате спектр, мало похожий на обычный резонансный, спектральная плотность (15.3.7) может причудливым образом изменяться при изменении $\mathcal{D}_k$.

Пример 15.3.1. Пусть имеется инерционное нелинейное преобразование $\xi(t) \rightarrow x(t)$, определяемое уравнением

$$dx/dt = -a(x) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный дельта-процесс с $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и коэффициентами интенсивности $\mathcal{D}_s$.

Согласно (III.5) кинетические коэффициенты рассматриваемого марковского процесса равны

$$K_1(x) = -a(x), \quad K_2(x) = \mathcal{D}_2, \quad \dots, \quad K_n(x) = \mathcal{D}_n.$$

Уравнения эволюции первых четырех кумулянтов в эксцессном приближении согласно (15.3.1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{m}(t) &= -a(x), \\ \dot{D}(t) &= -2 \langle x, a(x) \rangle + \mathcal{D}_2, \\ \dot{\chi}_3(t) &= -3 \langle x, x, a(x) \rangle + \mathcal{D}_3, \\ \dot{\chi}_4(t) &= -4 \langle x, x, x, a(x) \rangle + \mathcal{D}_4.\end{aligned}\quad (15.3.8)$$

Установившиеся значения кумулянтов даются уравнениями

$$\begin{aligned}\langle a(x) \rangle &= 0, \quad 2 \langle x, a(x) \rangle = \mathcal{D}_2, \\ 3 \langle x, x, a(x) \rangle &= \mathcal{D}_3, \quad 4 \langle x, x, x, a(x) \rangle = \mathcal{D}_4.\end{aligned}$$

Коэффициенты, определяющие кинетические уравнения кумулянтных функций, на основании (15.3.4) таковы:

$$\begin{aligned}A_{22} &= -\langle a'(x) \rangle, \quad A_{23} = -\frac{1}{2} \langle a''(x) \rangle, \quad A_{24} = -\frac{1}{6} \langle a'''(x) \rangle, \\ A_{32} &= -2 \langle x, a'(x) \rangle, \quad A_{33} = -2 \langle a'(x) \rangle - \langle x, a''(x) \rangle, \\ A_{34} &= -\langle a''(x) \rangle - \frac{1}{3} \langle x, a'''(x) \rangle, \quad A_{42} = -3 \langle x, x, a'(x) \rangle, \\ A_{43} &= -6 \langle x, a'(x) \rangle - \frac{3}{2} \langle x, x, a''(x) \rangle, \\ A_{44} &= -3 \langle a'(x) \rangle - 3 \langle x, a''(x) \rangle - \frac{1}{2} \langle x, x, a'''(x) \rangle.\end{aligned}\quad (15.3.9)$$

Во всех этих выражениях, как уже говорилось, усреднение $\langle \dots \rangle$ производится в эксцессном приближении. Полученные уравнения (15.3.8) и значения коэффициентов (15.3.9) будут использованы в последующих параграфах для конкретного вида функции $a(x)$.

15.4. Инерционная система с кубической нелинейностью. Установление кумулянтов

1. Рассмотрим теперь более подробно закономерности нелинейного инерционного преобразования белого шума на одном сравнительно простом примере, который к тому же позволит нам найти точные значения некоторых характеристик исследуемого негауссова случайного процесса. Это дает возможность сравнить с ними значения, полученные в гауссовом и эксцессном приближениях, и тем самым выяснить практическую ценность этих приближений.

Пусть выражение, связывающее выходную $x(t)$ и входную $\xi(t)$ переменные, имеет вид

$$dx/dt = -ax^3 + \xi(t). \quad (15.4.1)$$

Оно описывает интегрирующее звено, охваченное отрицательной обратной связью с кубической нелинейностью. Входной случайный процесс примем стационарным гауссовым белым шумом:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t), \xi(t + \tau) \rangle = \mathcal{I} \delta(\tau).$$

В этом случае $x(t)$ есть однородный во времени непрерывный марковский процесс. Его кинетические коэффициенты согласно (III.5) равны $K_1(x) = -ax^3$, $K_2(x) = \mathcal{D}$.

Кинетическим уравнением для плотности вероятности $W(x, t)$ является уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [ax^3 W(x, t)] + \frac{\mathcal{D}}{2} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \quad (15.4.2)$$

с начальным условием $W(x, t) = W_0(x)$, где $W_0(x)$ — заданное вероятностное распределение.

2. Начнем анализ с вопроса, существует ли установившееся стационарное распределение $W(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t)$? Это распределение, очевидно, должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dx} [ax^3 W(x)] + \frac{\mathcal{D}}{2} \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0,$$

которое может быть записано в виде

$$ax^3 W(x) + \frac{\mathcal{D}}{2} \frac{dW(x)}{dx} = C_1, \quad (15.4.3)$$

где C_1 — произвольная постоянная, определяемая граничными условиями. Решение уравнения (15.4.3) можно, конечно, вычислить, однако для ответа на поставленный вопрос более целесообразно привлечь физические соображения.

3. Уравнение (15.4.1) описывает поведение координаты вязкой броуновской частицы в потенциальном поле сил с потенциалом $U(x) = ax^4/4$. Говоря о вязкой частице, мы имеем в виду пренебрежение силами инерции по сравнению с силами вязкого трения. Случайный процесс $\xi(t)$ представляет случайную дельта-коррелированную силу, действующую на броуновскую частицу со стороны среды. Коэффициент $\mathcal{D}$ определяет интенсивность этого воздействия.

Модель броуновской частицы, движущейся в потенциальном поле, весьма наглядна и позволяет, опираясь на физические представления, без особого труда ответить на целый ряд вопросов, касающихся статистических свойств ее координаты.

Так, плотность вероятности $W(x, t)$ можно трактовать как распределение плотности броуновских частиц по потенциальной «яме» в каждый данный момент времени t , если в начальный момент времени это распределение было равно $W_0(x)$ (рис. 15.2). Совершенно очевидно, что процесс эволюции $W(x, t)$ определяется тем, что, с одной стороны, на частицы действуют «растаскивающие» силы диффузионной природы, стремящиеся «размазать» плотность $W(x, t)$ по всему фазовому пространству x , а с другой стороны, действует потенциальная сила, ограничивающая их местонахождение потенциальной ямой. И именно этот процесс и описывает уравнение (15.4.2). Если бы потенциальной ямы не было ($a = 0$), то мы имели бы свободную броуновскую частицу, кинетическое уравнение перешло бы в обыч-

ное уравнение диффузии, а плотность $W(x, t)$ постепенно «расползлась» бы по всему пространству: $W(x, t) \rightarrow 0$. Наличие потенциальной ямы, бесконечно возрастающей при $|x| \rightarrow \infty$, ограничивает расплывание $W(x, t)$ стационарным распределением $W(x)$, имеющим конечное значение дисперсии. Вместе с этим, как очевидно, симметричность потенциальной ямы приводит к симметричности $W(x)$ по отношению к точке $x = 0$.

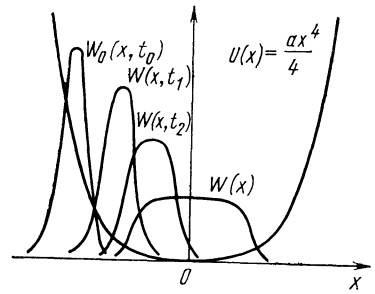


Рис. 15.2.

Таким образом, из приведенных физических соображений с очевидностью следует, что распределение $W(x)$, независимо от начального вида $W_0(x)$, существует, имеет граничные значения $W(\pm\infty) = 0$, $W'(\pm\infty) = 0$ и является четной функцией x .

Обращаясь теперь к уравнению (15.4.3), на основании сказанного нетрудно найти

$$W(x) = A^{-1} \exp(-ax^4/2\mathcal{D}). \quad (15.4.4)$$

Постоянный множитель определяется из условия нормировки

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ax^4}{2\mathcal{D}}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathcal{D}}{a}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Таково точное значение стационарной плотности вероятности марковского процесса $x(t)$. Оно позволяет вычислить точные значения установившихся кумулянтов.

Вместе с этим, исходя из (15.4.2), не удастся отыскать зависящую от времени плотность вероятности $W(x, t)$, описывающую нестационарный марковский процесс $x(t)$. Поэтому единственным путем к отысканию характеристик процесса установления $W_0(x) \rightarrow W(x, t) \rightarrow W(x)$ остается метод кинетических уравнений для кумулянтов, к которому мы сейчас и перейдем.

4. Учитывая значения кинетических коэффициентов и свойства кумулянтных скобок, на основании (10.6.14) нетрудно записать следующие точные уравнения эволюции для кумулянтов исследуемого марковского процесса:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -a \langle x^3 \rangle, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -2a \langle x, x^3 \rangle + \mathcal{I}, \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -3a \langle x, x, x^3 \rangle, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\frac{d\kappa_s(t)}{dt} = -sa < x^{[s-1]}, x^3 >. \quad (15.4.5)$$

Если раскрыть правые части этих уравнений [см. (II.3)], то мы получим бесконечную цепочку кинетических нелинейных уравнений для последовательности кумулянтов:

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_1(t)}{dt} &= -a [\kappa_3 + 3\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1^3], \\ \frac{d\kappa_2(t)}{dt} &= -2a [\kappa_4 + 3\kappa_1 \kappa_3 + 3\kappa_2^2 + 3\kappa_1^2 \kappa_2] + \mathcal{D}, \\ \frac{d\kappa_3(t)}{dt} &= -3a [\kappa_5 + 3\kappa_1 \kappa_4 + 9\kappa_2 \kappa_3 + 3\kappa_1^2 \kappa_3 + 6\kappa_1 \kappa_2^2], \\ \frac{d\kappa_4(t)}{dt} &= -4a [\kappa_6 + 3\kappa_1 \kappa_5 + 12\kappa_2 \kappa_4 + 3\kappa_1^2 \kappa_4 + \\ &\quad + 9\kappa_3^2 + 18\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 + 6\kappa_2^3], \\ &\dots \end{aligned} \quad (15.4.6)$$

Эта цепочка вследствие нелинейности системы является зацепляющейся: в уравнение для первого кумулянта входят второй и третий, для второго — первый, третий и четвертый, для третьего, кроме первых трех, еще четвертый и пятый и т. д. По этой причине получить точное значение всех кумулянтов, даже если мы справимся с нелинейными уравнениями, невозможно. Поэтому мы ограничимся лишь двумя приближениями: гауссовым и эксцессным.

В гауссовом приближении уравнения (15.4.6) для первых двух кумулянтов $\kappa_1 = m$, $\kappa_2 = D$ принимают вид [то же, разумеется, следует и из (15.2.15)]

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= -a [3D + m^2]m, \\ \dot{D}(t) &= \mathcal{D} - 6a [D + m^2]D. \end{aligned} \quad (15.4.7)$$

Таков закон установления среднего и дисперсии при произвольных начальных условиях $m(0) = m_0$, $D(0) = D_0$. Установившаяся величина среднего значения $m = 0$ следует из первого уравнения (15.4.7) и из приведенных физических соображений. Таким образом, из второго уравнения (15.4.7) находим установившееся значение дисперсии

$$D = \sqrt{\mathcal{D}/6a}. \quad (15.4.8)$$

Если $m_0 = 0$, то $m(t) \equiv 0$ для всех $t > 0$. В этом случае установление дисперсии будет происходить по закону

$$\dot{D}(t) = \mathcal{D} - 6aD^2. \quad (15.4.9)$$

Решение этого уравнения таково:

$$D(t) = D \frac{(D + D_0) - (D - D_0) e^{-\gamma t}}{(D + D_0) + (D - D_0) e^{-\gamma t}},$$

где D определяется формулой (15.4.8), а $\gamma = \sqrt{24\mathcal{D}a}$.

Таким образом, релаксация дисперсии происходит с постоянной времени

$$\tau_p = 1/\sqrt{24\mathcal{I}a}. \quad (15.4.10)$$

При $m_0 \neq 0$ процесс установления $m(t)$ и $D(t)$ будет происходить более сложным образом, так, например, при некоторых значениях m_0 в процессе $D_0 \rightarrow D$ дисперсия может принимать значения меньшие D , если даже $D_0 > D$. Вместе с тем, легко показать, что вблизи установившихся значений релаксация среднего значения идет в четыре раза медленнее, чем релаксация дисперсии, т. е. что $\gamma_m = \sqrt{(3/2)\mathcal{I}a}$, $\gamma_D = \gamma$. Чтобы определить общую картину установления, следует, конечно, построить фазовое пространство, соответствующее системе (15.4.7). Мы этого делать не будем, ограничившись симметричным начальным распределением, а основное внимание уделим теперь поправкам, связанным с учетом эксцессного приближения.

5. В эксцессном приближении уравнения (15.4.6) принимают следующий вид [который, разумеется, совпадает с (15.3.8)]:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_1 &= -a [\kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3], \\ \dot{\kappa}_2 &= -2a [\kappa_4 + 3\kappa_1\kappa_3 + 3\kappa_2^2 + 3\kappa_1^2\kappa_2] + \mathcal{D}, \\ \dot{\kappa}_3 &= -3a [3\kappa_1\kappa_4 + 9\kappa_2\kappa_3 + 3\kappa_1^2\kappa_3 + 6\kappa_1\kappa_2^2], \\ \dot{\kappa}_4 &= -4a [12\kappa_2\kappa_4 + 3\kappa_1^2\kappa_4 + 9\kappa_3^2 + 18\kappa_1\kappa_2\kappa_3 + 6\kappa_3^3]. \end{aligned} \quad (15.4.11)$$

Мы уже знаем, что установившееся распределение является симметричным, так что $\kappa_{1\infty} = \kappa_{3\infty} = 0$. Поэтому из (15.4.11) следует, что установившиеся значения четных кумулянтов определяются уравнениями ($\kappa_{2\infty} = D$)

$$\kappa_{4\infty} + 3D^2 = \mathcal{I}/2a, \quad 2D\kappa_{4\infty} + D^3 = 0.$$

Отсюда

$$D = \sqrt{\mathcal{D}/5a}, \quad \kappa_{4\infty} = -\mathcal{D}/10a. \quad (15.4.12)$$

Таким образом, учет эксцессного приближения привел к несколько другому значению дисперсии и к отличному от нуля эксцессу.

Представляет несомненный интерес сравнение полученных значений кумулянтов с точными, которые могут быть найдены из (15.4.4). Расчет показывает, что эти точные значения равны

$$D = \sqrt{\frac{2\mathcal{D}}{a}} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}, \quad \kappa_{4\infty} = \frac{2\mathcal{D}}{a} \left[\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(1/4)} - 3 \frac{\Gamma^2(3/4)}{\Gamma^2(1/4)} \right].$$

Если обратиться к численным значениям, то получим:

	Гауссово приближение	Эксцессное приближение	Точное значение
D	$0,41 \sqrt{\mathcal{D}/a}$	$0,45 \sqrt{\mathcal{D}/a}$	$0,48 \sqrt{\mathcal{D}/a}$
$\kappa_{4\infty}$	0	$-0,1\mathcal{D}/a$	$-0,19\mathcal{D}/a$

Отсюда видно, что эксцессное приближение дает достаточно точное значение дисперсии и правильно показывает знак и порядок четвертого кумулянта. Причем самое важное заключается в том, что как гауссово, так и эксцессное приближения дают правильную картину *качественной* зависимости кумулянтов от параметров системы и воздействующего шума. В этом смысле уже гауссово приближение дает качественно правильный результат, который лишь количественно уточняется в дальнейших приближениях. Это позволяет надеяться, что эти приближения достаточно хорошо описывают исследуемые закономерности и в тех случаях, когда мы не имеем возможности проверить их точными результатами.

Это касается, конечно, и времен установления стационарных значений кумулянтов, поскольку найти точные значения эволюционирующих $\kappa_s(t)$, как уже говорилось, невозможно.

При исследовании процесса установления $W(x, t) \rightarrow W(x)$ в эксцессном приближении мы также ограничимся случаем симметричного распределения $W_0(x)$. В этом случае $\kappa_1(t) \equiv \kappa_3(t) \equiv 0$, а установление дисперсии и эксцесса, согласно (15.4.11), описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{D}(t) &= -2a[\kappa_4(t) + 3D^2(t)] + \mathcal{D}, \\ \dot{\kappa}_4(t) &= -24a[2D(t)\kappa_4(t) + D^3(t)]. \end{aligned} \quad (15.4.13)$$

Чтобы получить полную картину установления, опять же необходимо строить соответствующий фазовый портрет, чего мы делать не будем, а выясним лишь характеристики установления вблизи стационарных значений (15.4.12). Линеаризуя (15.4.13) и решая полученные уравнения, мы найдем, что установление обоих кумулянтов происходит по экспоненциальному закону с двумя постоянными времени:

$$\tau_{p_1} = 1/\sqrt{20\mathcal{D}a}, \quad \tau_{p_2} = 1/\sqrt{500\mathcal{D}a}.$$

Принимая во внимание лишь наибольшее время релаксации, ибо именно оно определяет полное установление дисперсии и эксцесса, мы видим, что изменение $\tau_p^{\max}$ при переходе от гауссова приближения (15.4.10) к эксцессному, во-первых, незначительно и, во-вторых, что опять-таки самое главное, носит *только количественный* характер! Как будет ниже показано, и неизвестное нам точное значение $\tau_p^{\max}$ также пропорционально $1/\sqrt{\mathcal{D}a}$. Другими словами, имеем

	Гауссово приближение	Эксцессное приближение	Точное значение
$\tau_p^{\max}$	$\frac{0,204}{\sqrt{\mathcal{D}a}}$	$\frac{0,224}{\sqrt{\mathcal{D}a}}$	$\frac{b}{\sqrt{\mathcal{D}a}},$

в которой неизвестный коэффициент b является пределом последовательности: 0, 204; 0,224; ...

6. Найдем теперь зависимость произвольного кумулянта от параметра нелинейности системы a и интенсивности воздействующего шума $\mathcal{D}$ и докажем, что точные значения всех времен релакса-

ции $\sim (a\mathcal{D})^{-1/2}$. Для этого запишем уравнения эволюции кумулянтов в безразмерном виде при дифференцировании по безразмерному времени.

Анализируя второе уравнение (15.4.5), нетрудно обнаружить, что переменную x можно представить через безразмерную переменную u следующим образом:

$$x(t) = \sqrt[4]{\mathcal{D}/a} u(\Theta).$$

Подставляя это выражение в остальные уравнения (15.4.5), учитывая свойства кумулянтных скобок, легко найти переход к безразмерному времени Θ , равному

$$\Theta = t/\tau_0, \quad \tau_0 = 1/\sqrt[4]{a\mathcal{D}}.$$

Таким образом, уравнения кумулянтов переменной $u(\Theta)$ примут вид

$$\frac{d\kappa_s^u(\Theta)}{d\Theta} = -s \langle u^{[s-1]}, u^3 \rangle, \quad s \neq 2,$$

$$\frac{d\kappa_2^u(\Theta)}{d\Theta} = -2 \langle u, u^3 \rangle + 1,$$

в которые входят *только численные коэффициенты*. Это приведет к тому, что времена релаксации кумулянтов $\kappa_s^u(\Theta)$ представляют собой набор чисел Θ_p . Следовательно, кумулянты имеют вид

$$\kappa_s^x(t) = (\mathcal{D}/a)^{s/4} \kappa_s^u(t/\tau_0), \quad (15.4.14)$$

а их времена релаксации равны

$$\tau_p = \Theta_p \tau_0 = \Theta_p / \sqrt[4]{a\mathcal{D}}.$$

Этот результат является точным. Из него следует, что все кумулянты по абсолютной величине возрастают с ростом $\mathcal{D}/a$, а их времена релаксации уменьшаются с увеличением $a\mathcal{D}$.

Вместе с этим, поскольку кумулянтные коэффициенты

$$\gamma_s(t) = \kappa_s^u(t/\tau_0) / [\kappa_2^u(t/\tau_0)]^{s/2}$$

вовсе не зависят ни от $\mathcal{D}$, ни от a , форма установившегося вероятностного распределения, как это и должно быть [ср. с (15.4.4)], сохраняется постоянной при всех значениях $\mathcal{D}$ и a , а с ростом $\mathcal{D}/a$ возрастает лишь дисперсия распределения.

Более интересной и менее очевидной является полученная зависимость времен релаксации распределения от $\mathcal{D}$: чем больше интенсивность воздействующего шума, тем быстрее происходит установление. К этому обстоятельству мы сейчас и обратимся.

7. Прежде всего отметим, что уменьшение τ_p с ростом $\mathcal{D}$ на первый взгляд представляется физически очевидным, поскольку более интенсивный шум быстрее «растаскивает» по потенциальной яме изображающие точки, сконцентрированные начальным распределе-

нием $W_0(x)$. К этому следует добавить, что интенсивность случайного воздействия $\xi(t)$, равная $\mathcal{D}$, есть не что иное, как коэффициент диффузии броуновских частиц в отсутствие силового поля. Таким образом, кажется очевидным, что независимо от вида потенциальной функции $U(x)$ установление стационарного распределения $W(x)$ всегда будет идти тем быстрее, чем больше коэффициент диффузии.

Однако это отнюдь не так. В самом деле, положим $U(x) = (1/2)bx^2$, т. е. рассмотрим случай квадратичной потенциальной ямы, для которой $a(x) = -dU(x)/dx = -bx$, а система является линейной. Согласно (10.6.16), установление кумулянтов случайного процесса $x(t)$ происходит в этом случае по законам

$$\begin{aligned} \kappa_s(t) &= \kappa_{s0} e^{-sbt}, \quad s \neq 2, \\ D(t) &= D_0 e^{-2bt} + \frac{\mathcal{D}}{2b} [1 - e^{-2bt}]. \end{aligned} \quad (15.4.15)$$

Отсюда следует, что время установления кумулянтов, в том числе и дисперсии, *не зависит* от коэффициента диффузии $\mathcal{D}$, а зависит только от параметра системы (что само по себе очевидно).

Следовательно, с одной стороны, зависимость времени релаксации вероятностного распределения от интенсивности воздействующего шума является существенно нелинейным эффектом, а с другой стороны, это значит, что в приведенных рассуждениях мы что-то не учли.

Более того, забегаая вперед (см. § 15.6), отметим, что в общем случае нелинейной системы, описываемой, например, уравнением (15.2.13), мы можем получить, в принципе, любые зависимости τ_p от $\mathcal{D}$, в том числе и такие, при которых τ_p *увеличивается* с ростом $\mathcal{D}$.

Итак, в чем же здесь дело? Что мы недоучли? Дело все в том, что мы не учитывали того факта, что чем больше коэффициент диффузии $\mathcal{D}$, т. е. чем больше интенсивность воздействующего шума, тем большее стационарное значение должна иметь дисперсия выходной переменной. А это значит, что тем дольше должна устанавливаться дисперсия. Таким образом, в общем случае коэффициент диффузии двояко влияет на время релаксации. С одной стороны, чем больше $\mathcal{D}$, тем быстрее «расползаются» изображающие точки от какого-то начального распределения, а с другой стороны, тем больший «путь» должна проходить дисперсия до ее установившегося значения. Вид «окончательной» зависимости τ_p от $\mathcal{D}$ как раз и должен учитывать оба эти фактора, и он существенно зависит от конкуренции этих двух противоборствующих факторов. В принципе, мыслим такой случай, когда эти факторы взаимно уравниваются, т. е. когда τ_p вовсе не зависит от $\mathcal{D}$. И этот случай как раз и является случаем параболической потенциальной ямы $U(x) \sim x^2$, т. е. случаем линейной системы*.

* Свободной диффузии, когда $U(x) = 0$, также соответствует линейная система. Однако для нее времени релаксации не существует ($\tau_p = \infty$), поскольку свободная диффузия — это никогда не кончающийся переходный процесс.

Все это ведет к тому, что уже по одному виду потенциальной функции можно судить о качественной зависимости τ_p от $\mathcal{D}$. Этим мы займемся ниже в § 15.6, а сейчас постараемся понять, почему для рассматриваемого случая $a(x) = ax^3$ время релаксации обратно пропорционально $\sqrt{\mathcal{D}a}$.

8. Ограничившись гауссовым приближением, чего заведомо достаточно для решения поставленного вопроса, необходимо вспомнить, что мы тем самым вместо нелинейной системы рассматриваем некоторую эквивалентную линейную систему. По этой причине, ограничившись сначала качественными рассуждениями, проанализируем уравнение (15.4.1) иным образом, переписав его так:

$$dx/dt = -(ax^3)x + \xi(t).$$

Посмотрим на это уравнение как на

$$dx/dt = -bx + \xi(t),$$

где $b = ax^2$. Это есть уравнение «линейной» системы, параметр которой зависит от мгновенного значения выходной переменной x . Параметр $b = b(x)$ в силу случайности процесса $x(t)$ сам есть случайная функция. Возьмем теперь в качестве его первого приближения среднее значение $\langle b(x) \rangle = a \langle x^2 \rangle = a(D + m^2) = aD$. Так мы придем к линейной системе

$$dx/dt = -aDx + \xi, \quad (15.4.16)$$

для которой установление кумулянтов идет согласно (15.4.15), откуда мы с помощью (15.4.8) мгновенно получаем

$$\tau_p \sim \frac{1}{b} = \frac{1}{aD} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{6a}{\mathcal{D}}} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}a}}, \quad (15.4.17)$$

что и требовалось доказать. Таким образом, исследуемую нелинейную систему можно приближенно рассматривать как инерционную параметрическую систему, постоянная времени которой обратно пропорциональна дисперсии выходного процесса.

Теперь уже не представляет никакого труда и получение точного значения коэффициента в (15.4.17) при гауссовом приближении, если принять во внимание, что ограничение гауссовым приближением означает замену исходной нелинейной системы (15.4.1) линейной системой (15.2.10)

$$dx/dt = -\Pi(m, D)x + B(m, D)\xi,$$

для которой, согласно (15.2.14),

$$\Pi(m, D) = \langle a'(x) \rangle_r = 3a \langle x^2 \rangle_r = 3aD, \quad B(m, D) = 1. \quad (15.4.18)$$

Отсюда уравнение (15.2.15) сразу же приводит к (15.4.9) и, следовательно, к (15.4.10).

Таким образом, наши рассуждения относительно «линейного» уравнения были верны с той лишь поправкой, что при гауссовом приближении вместо (15.4.16) следует брать уравнение

$$dx/dt = -3aDx + \xi(t).$$

15.5. Инерционная система с кубической нелинейностью. Спектры

1. Будем теперь считать, что все переходные процессы закончились, кумулянты приняли установившиеся значения, и марковский негауссов процесс, описываемый уравнением (15.4.1), стал стационарным случайным процессом. Исследуем спектр этого процесса и найдем его время корреляции в гауссовом и эксцессном приближениях.

В гауссовом приближении корреляционная функция и спектр согласно (15.2.6), (15.2.8), (15.4.18) равны

$$B_x[\tau] = K_x[\tau] = De^{-3aD|\tau|},$$

$$G_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \frac{3aD}{(3aD)^2 + \omega^2}.$$

Зависимость дисперсии от параметра системы и интенсивности возмущающего шума определяется формулой (15.4.8). Соответственно время корреляции марковского процесса и энергетическая плотность его спектра равны

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{1}{3aD} = \sqrt{\frac{2}{3a\mathcal{D}}}, \quad \Omega_0 = \frac{3\pi aD}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3a\mathcal{D}}{2}}. \quad (15.5.1)$$

Следовательно, не только время релаксации, но и время корреляции марковского процесса существеннейшим образом зависит от интенсивности возмущающего шума $\mathcal{D}$. Это связано с тем, что от интенсивности возмущающего шума зависит жесткость системы, которая и определяет время корреляции процесса и его спектр.

Обратимся к рис. 15.3, на котором изображена функция, описывающая нелинейность системы. При малом значении $\mathcal{D}$, когда возмущающий шум является слабым, дисперсия выходного процесса также мала. Малость дисперсии означает, что значения $x(t)$, в основном, пребывают в области A . В этой области некоторый усредненный наклон кривой $a(x)$ — жесткость системы — сравнительно невелик. Это приводит к большому значению времени корреляции и соответственно к малой полосе спектра. При возрастании $\mathcal{D}$ дисперсия выходной переменной увеличивается, она захватывает область B , где уже усредненный наклон $a(x)$ становится больше. Большая жесткость системы уменьшает время корреляции и увеличивает полосу спектра. При дальнейшем росте $\mathcal{D}$ жесткость системы возрастает еще больше, что, в свою очередь, ведет к дальнейшему

уменьшению $\tau_{\text{кор}}$ и росту Ω_0 . При этом количественные изменения времени корреляции и полосы спектра как раз и даются выражениями (15.5.1).

На рис. 15.4 показана эволюция спектра

$$G_x(\omega) = G^0 \frac{(2\Omega_0/\pi)^2}{(2\Omega_0/\pi)^2 + \omega^2}, \quad G^0 \equiv G_x(0) = \frac{D}{2\Omega_0} = \frac{1}{3a\pi}, \quad (15.5.2)$$

с ростом интенсивности воздействующего на систему белого шума. Весьма примечательным обстоятельством является независимость

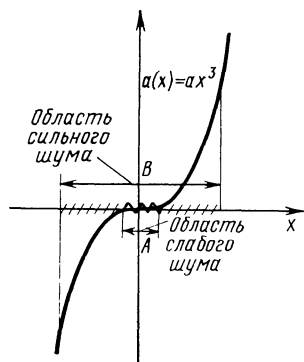


Рис. 15.3.

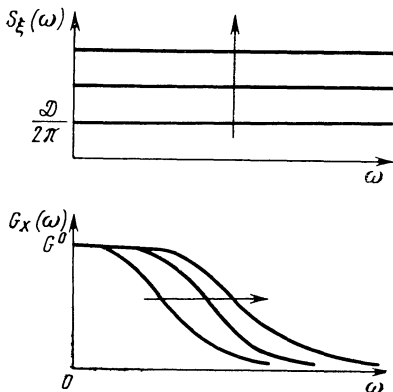


Рис. 15.4.

значения спектральной плотности при $\omega = 0$ от интенсивности воздействующего шума. Это обстоятельство, так же как и зависимость Ω_0 от $\mathcal{D}$, является, конечно, нелинейным эффектом.

Нетрудно понять, почему в данном случае G^0 не изменяется при изменении $\mathcal{D}$. Согласно определению энергетической полосы ($\langle x(t) \rangle = 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = D \equiv 2G^0\Omega_0.$$

Поскольку при изменении $\mathcal{D}$ дисперсия D изменяется по тому же закону, что и Ω_0 [ср. (15.4.8) и (15.5.1)], то из приведенной формулы следует, что G^0 не должно зависеть от $\mathcal{D}$.

2. Рассмотрим теперь корреляционную функцию и спектр в эксцессном приближении и выясним, что нового дает это приближение и не меняет ли оно качественные закономерности, выявленные в гауссовом приближении.

Поскольку стационарный марковский процесс обладает симметричным вероятностным распределением, то $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$, а также

$\kappa_3(0, \tau, \tau) \equiv 0$. Уравнения (15.3.3), определяющие кумулянтные функции, примут вид

$$\begin{aligned}\frac{d\kappa_2(0, \tau)}{d\tau} &= A_{22} \kappa_2(0, \tau) + A_{24} \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau), \\ \frac{d\kappa_4(0, \tau, \tau, \tau)}{d\tau} &= A_{42} \kappa_2(0, \tau) + A_{44} \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau),\end{aligned}\quad (15.5.3)$$

где коэффициенты согласно (15.3.9) равны

$$\begin{aligned}A_{22} &= -3aD, \quad A_{24} = -a, \quad A_{42} = -(27/2)aD^2, \\ A_{44} &= -27aD.\end{aligned}$$

Здесь при вычислении коэффициентов мы уже учли стационарные значения кумулянтов в эксцессном приближении (15.4.12) и выразили $\kappa_{4\infty}$ через D .

Характеристическое уравнение для (15.5.3) имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3aD - \lambda & a \\ \frac{27}{2}aD^2 & 27aD - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а его корни равны

$$\lambda_1 = \sqrt{6} aD = \sqrt{\frac{6}{5} a\mathcal{D}}, \quad \lambda_2 = 27,5aD = 27,5 \sqrt{\frac{a\mathcal{D}}{5}}.$$

Второй корень существенно больше первого ($\lambda_2/\lambda_1 \approx 11$).

Вычисляя коэффициенты в (15.3.5) с помощью (15.3.6), найдем следующие выражения для второй и четвертой кумулянтных функций в эксцессном приближении:

$$\begin{aligned}\kappa_2(0, \tau) &= B_x[\tau] = \sqrt{\frac{\mathcal{D}}{5a}} \left[\frac{99}{100} e^{-\lambda_1 |\tau|} + \frac{1}{100} e^{-\lambda_2 |\tau|} \right], \\ \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau) &= -\frac{\mathcal{D}}{10a} \left[\frac{11}{10} e^{-\lambda_1 |\tau|} - \frac{1}{10} e^{-\lambda_2 |\tau|} \right].\end{aligned}\quad (15.5.4)$$

Сравнивая это с результатом гауссова приближения

$$B_x[\tau] = \sqrt{\mathcal{D}/6a} \exp(-\sqrt{3a\mathcal{D}/2} |\tau|), \quad \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau) \equiv 0,$$

видим, что учет эксцессного приближения привел, во-первых, как и должно быть, к ненулевому значению $\kappa_4(0, \tau, \tau, \tau)$, во-вторых, усложнил вид корреляционной функции и, в-третьих, изменил время корреляции. Вместе с этим, второе слагаемое в обеих кумулянтных функциях для всех τ много меньше первого и гораздо быстрее спадает с ростом τ . По этой причине, а также и потому, что все рассмотрение идет приближенно, мы можем вторыми слагаемыми в (15.5.4) пренебречь и считать, что эксцессное приближение дает нам

$$\begin{aligned}B_x[\tau] &= \sqrt{\mathcal{D}/5a} \exp(-\sqrt{6a\mathcal{D}/5} |\tau|), \\ \kappa_4(0, \tau, \tau, \tau) &= -(\mathcal{D}/10a) \exp(-\sqrt{6a\mathcal{D}/5} |\tau|)\end{aligned}$$

и соответственно

$$G_x(\omega) = \frac{1}{\sqrt{6} \pi a} \frac{(2\Omega_0/\pi)^2}{(2\Omega_0/\pi)^2 + \omega^2}, \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{6a\mathcal{D}}{5}}. \quad (15.5.5)$$

Таким образом, главное, в чем проявился учет эксцессного приближения, кроме ранее полученной поправки на дисперсию, — это изменение времени корреляции и соответственно полосы и значения спектра в нуле, форму которого по-прежнему можно считать резонансной. В результате получаем

	Гауссово приближение	Эксцессное приближение	Точное значение
$\tau_{\text{кор}}$	$\frac{0,82}{\sqrt{a\mathcal{D}}}$	$\frac{0,91}{\sqrt{a\mathcal{D}}}$	$\frac{b}{\sqrt{a\mathcal{D}}}$
Ω_0	$1,92 \sqrt{a\mathcal{D}}$	$1,73 \sqrt{a\mathcal{D}}$	$\frac{\pi}{2b} \sqrt{a\mathcal{D}}$

Таким образом, учет эксцессного приближения ничего не изменил в физической интерпретации полученных результатов и качественной картине эволюции спектра, а привел лишь к поправкам на параметры спектрально-корреляционных характеристик.

Это дает основание предполагать, что и неизвестные нам точные значения времени корреляции и ширины спектра негауссова марковского процесса имеют вид, указанный в таблице (с коэффициентом b , являющимся пределом ряда $0,82; 0,91; \dots$).

3. Обсудим теперь весьма важную и интересную ситуацию, связанную с тем, что полученное значение спектральной плотности $G_x(\omega)$ в точке $\omega = 0$ не зависит от интенсивности воздействующего шума. Хотя этот результат получен нами только в гауссовом (15.5.2) и эксцессном (15.5.5) приближениях, есть все основания полагать его точным (неизвестным при этом остается лишь точное значение $G^0 \sim 1/\pi a$).

Рассмотрим исходное уравнение для процесса $x(t)$

$$dx/dt = -ax^3 + \xi(t) \quad (15.5.6)$$

и поставим вопрос: можно ли определить медленные компоненты марковского процесса $x(t)$ методом квазистатики, т. е. пренебрегая производной dx/dt и сводя дифференциальное уравнение к алгебраическому? На первый взгляд это вполне разумный подход. Действительно, мы выбираем такие медленные компоненты случайного процесса $x(t)$, для которых $dx/dt \ll ax^3$ (или выполняется соответствующее неравенство для усредненных величин), и для этих медленных компонент $x_M(t)$ получаем уравнение

$$ax_M^3(t) = \xi(t), \quad (15.5.7)$$

которое описывает уже безынерционное нелинейное преобразование. Решая это уравнение соответствующими методами, мы находим

значение спектральной плотности $G_{xM}(0)$, и, как ожидается, этот результат должен совпасть с тем, что мы получаем, решая инерционное уравнение.

Вместе с тем мы получим явное противоречие в результатах. В самом деле, если мы будем решать уравнение (15.5.7) и отыскивать спектр $G_{xM}(\omega)$, то совершенно очевидно, что он должен зависеть от $S_{\xi}(\omega)$ [см., например, (14.10.5)], т. е. от $\mathcal{D}$, в то время как мы получили противоположный результат.

Объясняется это тем, что уравнение (15.5.6) нельзя решать квазистатически, потому что оно, с одной стороны, является нелинейным уравнением, а с другой стороны, в него входит белый шум. Разберем причину этого на гауссовом приближении, для которого уравнение (15.5.6) эквивалентно

$$dx/dt = -3aDx + \xi(t). \quad (15.5.8)$$

Чтобы можно было здесь пренебречь dx/dt по сравнению с $3aDx$, необходимо рассматривать медленность $x(t)$ по сравнению с полосой $\Pi = 3aD = 3a\langle x^2 \rangle$, определяемой дисперсией процесса $x(t)$. В этом случае из

$$3aDx = \xi(t) \quad (15.5.9)$$

мы получим правильный ответ

$$G^0 = S_{\xi}(0)/9a^2D^2 = 1/3\pi a,$$

если возьмем значение дисперсии $D = \sqrt{\mathcal{D}/6a}$. Но все дело в том, что это значение дисперсии мы не сможем получить ни из (15.5.9), ни тем более из (15.5.7), поскольку эти уравнения дают бесконечное значение D из-за того, что $\xi(t)$ есть белый шум. И если бы процесс $\xi(t)$ не был белым шумом, а был просто широкополосным шумом с полосой, много большей Ω_0 , мы все равно не получили бы из безынерционных уравнений правильного значения дисперсии, ибо оно существенно определяется инерционностью системы.

Другими словами, чтобы получить правильный ответ, нам все равно пришлось бы обратиться к инерционной системе (15.5.8) или, что то же самое, к (15.5.6). Таким образом, пренебрегая производной в (15.5.6) и рассматривая (15.5.7), мы не сможем получить правильного значения G^0 . Разумеется, этот вывод не связан с конкретной кубической нелинейностью, а носит общий характер.

Итак, если кратко резюмировать, то можно сказать следующее: нелинейное уравнение

$$dx/dt = -a(x) + \xi(t) \quad (15.5.10)$$

нельзя решать квазистатически, пренебрегая производной, потому что его нелинейность ведет к зависимости G^0 от дисперсии D , которая, в свою очередь, может быть правильно определена при широкополосном $\xi(t)$ только при учете инерционности системы.

Забегаая вперед, отметим, что только в том случае, когда воздействующий шум сам является достаточно *медленным*, действительно, можно пренебрегать производной в нелинейном уравнении (15.5.10), т. е. использовать квазистатистический подход (см. § 16.3).

15.6. Броуновское движение в потенциальных полях

1. Рассмотрим общую картину поведения случайного процесса $x(t)$, описываемого уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx} + \xi(t), \quad (15.6.1)$$

где $\xi(t)$, как и ранее, будем полагать стационарным гауссовым дельта-коррелированным процессом: $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \mathcal{D}\delta(\tau)$, $U(x)$ — некоторой заданной функцией x . Негауссов марковский процесс $x(t)$ опять же может интерпретироваться как координата броуновской частицы, движущейся в произвольном поле сил с потенциалом $U(x)$. В то же время уравнение (15.6.1) описывает нелинейные инерционные системы, встречающиеся в целом ряде задач статистической радиифизики, радиотехники, физической химии и т. д. (см., например, [5, 7, 70, 71]).

Марковский процесс $x(t)$ является непрерывным и однородным во времени. Его кинетические коэффициенты равны

$$K_1(x) = -U'(x), \quad K_2(x) = \mathcal{D}.$$

2. Первый вопрос, на который необходимо дать ответ: существует ли стационарная плотность вероятности марковского процесса $W(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t)$?

Ответ легко может быть получен при рассмотрении вида потенциальной функции $U(x)$. Если потенциальная функция такова, что при $|x| \rightarrow \infty$ она достаточно быстро стремится к бесконечности (рис. 15.5), то каково бы ни было начальное вероятностное распределение $W_0(x) = W(x, 0)$, изображающие точки никогда не выйдут из пределов потенциальных ям. С течением времени установится стационарное распределение $W(x)$ (показанное на рис. 15.5 пунктиром), максимумы которого приходятся на минимумы $U(x)$, ибо оно представляет собой плотность вероятности пребывания броуновской частицы, обладающей некоторой средней энергией, в том или ином месте потенциальной ямы.

Если же потенциальная функция ограничена при неограниченном возрастании x хотя бы в одну сторону (рис. 15.6), то стационарного значения плотности вероятности не существует — изображающие точки будут непрерывно «расползаться» по оси x , как это имеет место, в частности, для свободной диффузии ($U(x) = 0$), или будут «скатываться» с определенной скоростью ($\langle \dot{x} \rangle \neq 0$) в ту или иную сторону, как это, например, имеет место для уравнения

$$dx/dt = -bx^2 + \xi(t),$$

которому соответствует потенциальная функция $U(x) = bx^3/3$ (рис. 15.6).

3. В последующем мы будем иметь дело с потенциальными функциями, соответствующими рис. 15.5. В этом случае нетрудно найти явное выражение для стационарной плотности вероятности $W(x)$. В самом деле, уравнение ЭФП для (15.6.1) принимает вид

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{dU(x)}{dx} W(x, t) \right] + \frac{\mathcal{D}}{2} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \quad (15.6.2)$$

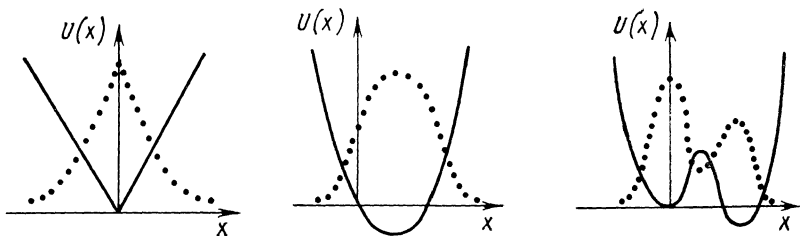


Рис. 15.5.

Стационарная плотность вероятности, как очевидно, удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d}{dx} S(x) \equiv \frac{d}{dx} \left[\frac{dU(x)}{dx} W(x) + \frac{\mathcal{D}}{2} \frac{dW(x)}{dx} \right] = 0,$$

где через $S(x)$ обозначен стационарный поток вероятности [5]. Следовательно, $S(x) = C_1 = \text{const}$ при любых значениях x .

Если потенциальная функция при $|x| \rightarrow \infty$ принимает бесконечные положительные значения, то поток вероятности через эти сечения должен быть равен нулю. Это приводит к $C_1 = 0$. Таким образом, для $W(x)$ получаем уравнение первого порядка

$$\frac{dW(x)}{dx} = -\frac{2}{\mathcal{D}} \frac{dU(x)}{dx} W(x),$$

решение которого находится элементарно:

$$W(x) = A e^{-2U(x)/\mathcal{D}}. \quad (15.6.3)$$

Постоянная интегрирования определяется из условия нормировки

$$A^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2U(x)}{\mathcal{D}} \right] dx.$$

Следует заметить, что полученное распределение есть не что иное, как распределение Больцмана, описывающее плотность распределения молекул газа, обладающего энергетической температурой Θ (в данном случае $\Theta = \mathcal{D}/2$) и находящегося в поле сил с потенциалом

$U(x)$. Таким образом, интенсивность случайного воздействия $\xi(t)$ может интерпретироваться как некоторая эффективная температура газа, частицами которого служат изображающие точки марковского процесса.

Стационарное распределение (15.6.3) делает очевидными графики $W(x)$, приведенные на рис. 15.5, и позволяет вычислить установившиеся значения всех кумулянтов распределения. Вместе с тем, для определения эволюции кумулянтов при произвольном начальном распределении $W_0(x)$ мы опять должны составлять и решать кинети-

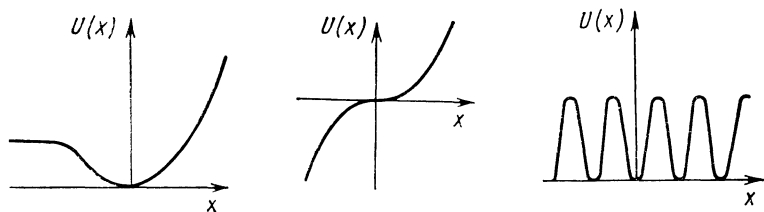


Рис. 15.6.

ческие уравнения для $\kappa_s(t)$, поскольку при произвольной форме потенциальной ямы не представляется возможным отыскать решение «нестационарного» уравнения (15.6.2).

4. На основании (15.6.1), (10.6.14), принимая во внимание значения кинетических коэффициентов и свойства кумулянтных скобок, получим следующую точную систему уравнений для кумулянтов:

$$\frac{d\kappa_s(t)}{dt} = -s \langle x^{[s-1]}, U'(x) \rangle + \begin{cases} 0, & s \neq 2 \\ \mathcal{D}, & s = 2 \end{cases}.$$

Вследствие нелинейности $U'(x)$ точное решение этой системы найти невозможно, и опять необходимо прибегать к модельным приближениям.

Если потенциальная яма такова, что плотность вероятности $W(x, t)$, хотя бы и сугубо приближенно, может быть представлена некоторой эквивалентной гауссовой кривой, то мы можем использовать гауссово приближение для нахождения законов установления кумулянтов. Как было показано на конкретном примере потенциальной функции $\sim x^4$, гауссово приближение приводит к правильным качественным зависимостям времен релаксации кумулянтов от параметра потенциальной ямы и интенсивности случайного воздействия $\mathcal{D}$. Это дает основание надеяться, что гауссово приближение и при других формах потенциальных ям даст нам качественно правильные результаты.

5. Согласно (15.2.3) уравнения установления первых двух кумулянтов имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= -F(m_t, D_t), \\ \dot{D}_t &= \mathcal{D} - 2D_t\Pi(m_t, D_t), \end{aligned} \quad (15.6.4)$$

где

$$F(m_t, D_t) = \langle U'(x) \rangle_r, \quad \Pi(m_t, D_t) = \langle U''(x) \rangle_r.$$

Установившиеся значения кумулянтов m, D определяются уравнениями

$$F(m, D) = 0, \quad D = \mathcal{D}/2\Pi(m, D). \quad (15.6.5)$$

Времена релаксации кумулянтов мы будем искать для простоты только вблизи их установившихся значений. Вводя малые отклонения

$$\mu = m_t - m, \quad \delta = D_t - D$$

для них из (15.6.4) с учетом (15.6.5), найдем

$$\dot{\mu} = -F'_m \mu - F'_D \delta, \quad \dot{\delta} = -[2D\Pi'_m] \mu - [2\Pi + 2D\Pi'_D] \delta.$$

Здесь функции F, Π и их производные берутся в точках $m_t = m, D_t = D$.

Вычисляя ρ_1, ρ_2 — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \rho - F'_m & -F'_D \\ -2D\Pi'_m & \rho - [2\Pi + 2D\Pi'_D] \end{vmatrix} = 0,$$

найдем времена релаксации $\tau_{p,1} = 1/\rho_1, \tau_{p,2} = 1/\rho_2$ и их зависимости от $\mathcal{D}$ и параметров потенциальной ямы.

В том случае, когда установление кумулянтов в фазовой плоскости m_t, D_t происходит по прямой $m_t = m$, для дисперсии получим уравнение $\dot{\delta} = -[2\Pi + 2D\Pi'_D]\delta$, а время релаксации дисперсии будет равно

$$\tau_p = \frac{1}{2\Pi + 2D\Pi'_D} = \frac{D(\mathcal{D})}{\mathcal{D} + 2D^2(\mathcal{D})\Pi'_D(\mathcal{D})}. \quad (15.6.6)$$

Если установившееся значение m не зависит от $\mathcal{D}$, формула (15.6.6) существенно упрощается. В этом случае из

$$\Pi'_D = \Pi'_D D'_D = \frac{1}{2} \left[\frac{D - \mathcal{D} D'_D}{D^2} \right]$$

следует $\mathcal{D} + 2D^2\Pi'_D = D/D'_D$. Тогда

$$\tau_p = D'_D(\mathcal{D}) \quad (15.6.7)$$

— время релаксации дисперсии равно ее производной по $\mathcal{D}$.

6. Выше, в § 15.4, при анализе процесса установления дисперсии в случае потенциальной функции $U(x) \sim x^4$ мы нашли, что время релаксации уменьшается с ростом интенсивности свободного броуновского движения $\mathcal{D}$. Там же мы нашли, что в случае параболической потенциальной ямы время релаксации вообще не зависит от $\mathcal{D}$, и объяснили это тем, что в этом случае уравниваются два противодействующих фактора: первый, ведущий к росту τ_p , связан большему «пути», который должна проходить дисперсия до ус-

тановившегося значения; второй, уменьшающий τ_p , связан с ускорением процесса установления при увеличении $\mathcal{D}$.

Полученное выражение (15.6.6) и, особенно, (15.6.7) четко показывают это конкурирующее влияние обоих факторов. Все определяется соотношением между скоростью роста $D(\mathcal{D})$ и $\mathcal{D}$. Если $D(\mathcal{D}) \sim \mathcal{D}$, как это имеет место для линейной системы, то τ_p не зависит от $\mathcal{D}$. Если $D(\mathcal{D})$ растет медленнее, чем $\mathcal{D}$, как это мы имели для потенциальной ямы $U(x) \sim x^4$, время релаксации будет падать с ростом $\mathcal{D}$. Если же форма потенциальной ямы такова, что $D(\mathcal{D})$ растет быстрее, чем $\mathcal{D}$, то мы получим увеличение τ_p с ростом $\mathcal{D}$.

7. Для реализации последнего случая необходимо, очевидно, чтобы потенциальная функция $U(x)$ возрастала при $|x| \rightarrow \infty$ достаточно медленно, и легко сообразить, что она должна расти медленнее, чем x^2 . Рассмотрим соответствующий пример потенциальной функции.

Пример 15.6.1. Пусть $U(x) = a|x|$ (рис. 15.5). Дифференциальное уравнение марковского процесса, соответствующее этой функции, имеет вид

$$dx/dt = -a \operatorname{sgn} x + \xi(t).$$

Из-за симметрии $U(x)$ установившееся значение $m = 0$. Соответственно

$$\langle U'(x) \rangle = \langle a \operatorname{sgn} x \rangle_r = F(m, D) = 0,$$

$$\langle U''(x) \rangle = 2b \langle \delta(x) \rangle_r = \frac{2a}{\sqrt{2\pi D}} = \Pi(m, D).$$

Зависимость дисперсии от $\mathcal{D}$ определяется вторым уравнением (15.6.5)

$$D = \pi \mathcal{D}^2 / 8a^2. \quad (15.6.8)$$

Таким образом, для «линейной» потенциальной ямы дисперсия растет пропорционально $\mathcal{D}^2$. Такой быстрый рост дисперсии как раз и обусловлен «пологостью» этой ямы. Согласно (15.6.7)

$$\tau_p = \pi \mathcal{D} / 4a^2 \quad (15.6.9)$$

— время, релаксации дисперсии, как мы и ожидали из качественных рассуждений, увеличивается с ростом $\mathcal{D}$.

Установившееся значение дисперсии (15.6.8) мы нашли в гауссовом приближении. Потенциальной функции $U(x) = a|x|$ соответствует, на основании (15.6.3), стационарное распределение

$$W(x) = \frac{a}{\mathcal{D}} \exp\left(-\frac{2a}{\mathcal{D}}|x|\right), \quad (15.6.10)$$

имеющее следующее точное значение дисперсии:

$$D = \mathcal{D}^2 / 2a^2. \quad (15.6.11)$$

Сравнивая (15.6.11) с (15.6.8), видим, что точное значение дисперсии получилось большим всего на 28%, хотя экспоненциальное распределение (15.6.10) существенно отличается от гауссова. Однако, что самое главное, используя гауссово приближение, мы, тем не менее, опять получили совершенно точный закон зависимости дисперсии от $\mathcal{D}$ и a . И это обстоятельство еще раз подчеркивает эффективность

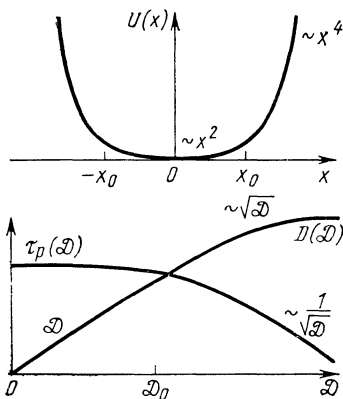


Рис. 15.7.

использования даже гауссова приближения при решении «нелинейных» задач в теории случайных процессов.

Используя эксцессное приближение, мы, конечно, получим значе-ние дисперсии, численно еще более близкое к точному, однако характер зависимости D от $\mathcal{D}$ и a опять же сохранится. Тем самым сохра-нится и вид зависимости τ_p от $\mathcal{D}$, a , соответствующий (15.6.9), с той лишь разницей, что вместо $\pi/4$ бу-дет несколько другой коэффициент.

8. Теперь уже не представляет никакого труда дать общую ка-чественную картину зависимости как D , так и τ_p от $\mathcal{D}$ для различных

видов потенциальных ям, тем более, что мы имеем некоторые «опор-ные точки», соответствующие рассмотренным потенциальным функ-циям:

$$U(x) = a|x|, \quad D = \frac{\pi \mathcal{D}^2}{8a^2}, \quad \tau_p = \frac{\pi \mathcal{D}}{4a^2},$$

$$U(x) = \frac{bx^2}{2}, \quad D = \frac{\mathcal{D}}{2b}, \quad \tau_p = \frac{1}{2b},$$

$$U(x) = \frac{cx^4}{4}, \quad D = \sqrt{\frac{\mathcal{D}}{6c}}, \quad \tau_p = \frac{1}{\sqrt{24\mathcal{D}c}}.$$

Здесь значения D и τ_p даны в гауссовом приближении.

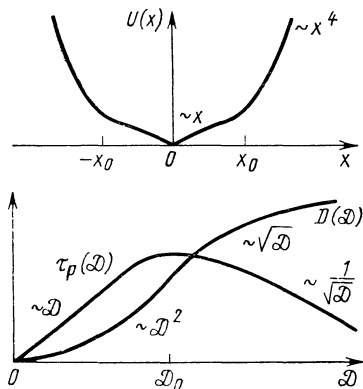


Рис. 15.8.

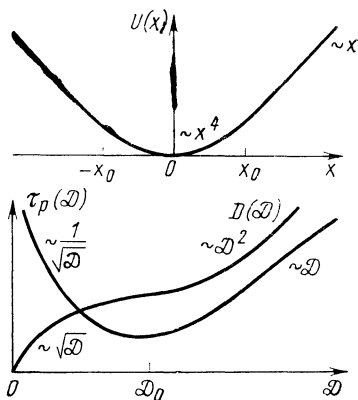


Рис. 15.9.

Пример 15.6.2. Пусть $U(x)$ пропорциональна x^2 для $|x| < x_0$ и пропорциональна x^4 для $|x| > x_0$ (рис. 15.7). Для малых значений $\mathcal{D}$ таких, что дисперсия вероятностного распределения заметно меньше x_0^2 , все распределение будет «находиться» в квадратичной потенциальной яме. Это значит, что при таких малых $\mathcal{D}$ мы имеем, фактически, случай $U(x) \sim x^2$, для которого $D \sim \mathcal{D}$, $\tau_p = \text{const}$. Для больших значений $\mathcal{D}$, для которых дисперсия становится много больше x_0^2 , начальная параболическая часть потенциальной ямы становится несущественной, и мы можем считать, что $U(x) \sim x^4$, вследствие чего $D \sim \sqrt{\mathcal{D}}$, $\tau_p \sim 1/\sqrt{\mathcal{D}}$.

Общий вид зависимостей $D(\mathcal{D})$ и $\tau_p(\mathcal{D})$ также показан на рис. 15.7. Граничное значение $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ соответствует по порядку величины дисперсии, равной x_0^2 .

Пример 15.6.3. Если $U(x) \sim |x|$ для $|x| < x_0$ и пропорциональна x^4 для $|x| > x_0$ (рис. 15.8), то, рассуждая аналогично, мы найдем, что для малых значений интенсивности броуновского движения $D \sim \mathcal{D}^2$, $\tau_p \sim \mathcal{D}$, а для больших $D \sim \sqrt{\mathcal{D}}$, $\tau_p \sim 1/\sqrt{\mathcal{D}}$. Следовательно, функция $\tau_p(\mathcal{D})$ будет иметь максимум, примерно соответствующий тому значению интенсивности $\mathcal{D}_0$, при котором $D \approx x_0^2$.

Пример 15.6.4. Если при малых x потенциальная функция $U(x) \sim x^4$, а при $|x| > x_0$ $U(x) \sim |x|$, то мы получим картину в определенном смысле «обратную» предыдущей, и в зависимости $\tau_p(D)$ появляется точка минимума, примерно соответствующая той интенсивности $\mathcal{D}$, при которой $D = x_0^2$ (рис. 15.9).

Число подобных примеров, показывающих, что на зависимости D и τ_p от $\mathcal{D}$ существенно влияет вид потенциальной функции $U(x)$ и что они могут быть весьма различными, можно легко продолжить. Однако практически более интересными являются картины спектров броуновского движения в различных потенциальных ямах и особенно зависимость ширины спектра от его интенсивности.

15.7. Спектры негауссова броуновского движения

1. Выше, в § 15.5, мы рассмотрели спектр стационарного негауссова броуновского движения, происходящего в потенциальной яме $U(x) \sim x^4$, и нашли, что его ширина зависит от интенсивности возмущающего шума $\mathcal{D}$, в то время как значение спектральной плотности в нуле G^0 постоянно. Как уже было отмечено, оба эти эффекта являются существенно нелинейными или, лучше сказать, эффектами негауссовости шума.

В этой связи представляется весьма интересным и важным выяснение общего характера поведения $G^0(\mathcal{D})$, $\Omega_0(\mathcal{D})$ в зависимости от вида потенциальных функций. Этому вопросу и посвящен настоящий параграф. Рассмотрение будет вестись в гауссовом приближении.

2. Спектр флуктуационной части негауссова броуновского движения, описываемого уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx} + \xi(t),$$

согласно (15.2.8), в гауссовом приближении имеет вид

$$G_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \frac{\Pi(m, D)}{\Pi^2(m, D) + \omega^2},$$

где $\Pi(m, D) = \langle U''(x) \rangle_r$. Записывая этот спектр в виде

$$G_x(\omega) = G^0 \frac{(2\Omega_0/\pi)^2}{(2\Omega_0/\pi)^2 + \omega^2},$$

получаем для энергетической полосы спектра и его значения в нуле выражения

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \frac{\pi}{2} \Pi(m, D) = \pi \mathcal{F}/4D(\mathcal{I}), \\ G^0 &= \frac{D}{\pi \Pi} = 2D^2(\mathcal{I})/\pi \mathcal{I},\end{aligned}\tag{15.7.1}$$

в которых мы уже учли, что $D = D(\mathcal{I})$ и $m = m(\mathcal{I})$ определяются уравнениями

$$D = \mathcal{D}/2\Pi(m, D), \quad F(m, D) \equiv \langle U'(x) \rangle_r = 0.\tag{15.7.2}$$

Из (15.7.1), как это и должно быть, следует, что

$$2\Omega_0(\mathcal{I}) G^0(\mathcal{I}) = D(\mathcal{I}).\tag{15.7.3}$$

3. Хотя Ω_0 есть полоса спектра марковского процесса $x(t)$, эту же величину можно принять и за *полосу нелинейной инерционной системы*, и этот шаг представляется весьма естественным и понятным, если учесть, что на входе системы мы имеем белый шум с бесконечно большой полосой, а на выходе — марковский процесс с полосой Ω_0 . Можно сказать, что имеется *нелинейная фильтрация* входного шума, и нелинейность этой фильтрации как раз и проявляется в том, что полоса системы существенно зависит от интенсивности шумового воздействия.

Первая формула (15.7.1) показывает, что увеличение или уменьшение полосы системы с ростом интенсивности воздействующего шума зависит от того, как быстро растет дисперсия выхода с ростом $\mathcal{D}$.

Если, например, мы имеем линейную систему, для которой $U'(x) = ax$, то значения $D(\mathcal{I}) = \mathcal{D}/2a$ и $\Pi(m, D) = a$ показывают, что Ω_0 вовсе не зависит от $\mathcal{D}$, как и должно быть для линейной системы.

Если $D(\mathcal{I})$ возрастает с ростом $\mathcal{D}$ быстрее, чем $\mathcal{D}$, то Ω_0 будет уменьшаться с ростом $\mathcal{D}$; если же $D(\mathcal{I})$ растет медленнее $\mathcal{D}$, то Ω_0 будет увеличиваться при возрастании $\mathcal{D}$.

Не представляет труда дать интерпретацию этим закономерностям. Если потенциальная функция возрастает медленнее x^2 , то, очевидно, что при росте $\mathcal{D}$ дисперсия установившегося распределения D будет расти быстрее, чем $\mathcal{D}$, поэтому Ω_0 будет уменьшаться с ростом $\mathcal{D}$. Если же потенциальная функция возрастает быстрее x^2 , то этот крутой рост потенциального барьера приведет к тому, что D будет увеличиваться с ростом $\mathcal{D}$ медленнее, чем $\mathcal{D}$. В этом случае система становится более жесткой, и поэтому Ω_0 будет увеличиваться с ростом $\mathcal{D}$.

Очевидно, что в том случае, когда вид потенциальной функции $U(x)$ различен для разных x , зависимость D от $\mathcal{D}$ будет определять-

ся отношением $\sqrt{D}$ к каким-то характерным размерам потенциальной ямы. Так, например, если при малых x система менее жестка, чем линейная, а при возрастании x жесткость увеличивается и становится большей, чем у линейной, то Ω_0 сначала будет уменьшаться с ростом $\mathcal{D}$, а затем увеличиваться.

Если рассматривать время корреляции выходного марковского процесса

$$\tau_k = 1/\Pi(m, D) = 2D(\mathcal{D})/\mathcal{D}, \quad (15.7.4)$$

то в его зависимости от $\mathcal{D}$ имеется много общего с зависимостью времени релаксации броуновского движения от $\mathcal{D}$ [ср. с (15.6.7)]. Оба эти времени увеличиваются с ростом $\mathcal{D}$, если $D(\mathcal{D})$ возрастает быстрее, чем $\mathcal{D}$, и уменьшаются, если имеется обратная зависимость. Вместе с тем, эти временные характеристики различны, поскольку они описывают различные временные процессы.

4. Перейдем теперь к конкретному рассмотрению, из которого особенности изменения спектров выхода системы при изменении интенсивности входного случайного процесса могут быть выяснены наиболее наглядно.

Как мы уже видели ранее (см. пример 15.6.1), дифференциальному уравнению

$$dx/dt = -a \operatorname{sgn} x + \xi(t) \quad (15.7.5)$$

соответствует потенциальная функция $U(x) = a|x|$ и $D(\mathcal{D}) = \pi\mathcal{D}^2/8a^2$. Из (15.7.1) находим

$$\Omega_0(\mathcal{D}) = 2a^2/\mathcal{D}, \quad G^0(\mathcal{D}) = \pi\mathcal{D}^3/32a^4. \quad (15.7.6)$$

Таким образом, полоса системы уменьшается с ростом $\mathcal{D}$, как это и должно быть из-за «мягкости» потенциальной ямы, в то время как значение спектральной плотности в нуле резко возрастает. Из (15.7.6) следует, что выходной шум при большой интенсивности входного шума становится весьма медленным, и он тем более медленен, чем больше $\mathcal{D}$. Можно сказать, что нелинейная система (15.7.5) осуществляет сильно инерционную нелинейную фильтрацию вблизи нулевых частот и может, в принципе, служить своеобразным фильтром «постоянного тока». Вместе с этим, эта система, конечно, не просто отфильтровывает широкополосный входной шум. Лучше сказать, что она трансформирует входной широкополосный шум в узкополосный выходной.

Интересно отметить, что для нелинейной инерционной системы (15.7.5) известно точное значение времени корреляции марковского процесса [72, 73] $\tau_k = \mathcal{D}/2a^2$.

Время корреляции, вычисленное в гауссовом приближении, согласно (15.7.4) равно $\tau_k = \pi\mathcal{D}/4a^2$.

Сравнение этих значений еще раз убедительно показывает, что, во-первых, гауссово приближение дает удовлетворительную точность и, во-вторых, правильно показывает качественную зависимость времени корреляции от $\mathcal{D}$ и a . Это позволяет предполагать, что

и точные значения Ω_0 и G^0 отличаются от (15.7.6) лишь численными поправками, хотя, разумеется, окончательное суждение о ценности использования гауссова приближения для решения подобных задач может дать лишь сравнение полученных значений с экспериментом.

5. Рассмотрим теперь броуновское движение в потенциальной яме, изображенной на рис. 15.10. Такая потенциальная функция означает наличие в инерционной системе релейного элемента с «зонай нечувствительности». Найдем параметры спектра и характер его деформации при изменении интенсивности воздействующего шума. Однако прежде чем производить какие-либо расчеты, проведем общий качественный анализ зависимости полосы спектра от $\mathcal{D}$.

Наличие зоны нечувствительности ведет к тому, что при малых $\mathcal{D}$ (таких, что $D \ll b^2$) система практически не ощущает присутствия потенциального барьера, и поэтому в системе отсутствует жесткость. Это значит, что при $\mathcal{D} \rightarrow 0$ должна $\Omega_0 \rightarrow 0$. В то же время при любом $\mathcal{D} > 0$ (при $D > 0$) крылья вероятностного распределения «чувствуют» рост потенциальной функции, поэтому при возрастании $\mathcal{D}$ полоса системы Ω_0 должна резко возрастать.

Если теперь взять противоположный случай, когда $\mathcal{D}$ настолько велико, что $D \gg b^2$, то зона нечувствительности практически не сказывается и мы приходим к случаю, рассмотренному в предыдущем примере, для которого $\Omega_0 = 2a^2/\mathcal{D}$. Следовательно, функция $\Omega_0 = \Omega_0(\mathcal{D})$ должна иметь максимум. Легко сообразить, что значение $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, при котором Ω_0 достигает максимального значения, должно соответствовать примерному равенству характерных «размеров» вероятностного распределения $\sqrt{D}$ и потенциальной ямы b , т. е. при $D \simeq b^2$. Нетрудно оценить порядок максимального значения полосы системы, поскольку оно должно выражаться лишь через параметры a и b . Из анализа размерностей следует, что $\Omega_0 \sim a/b$. Следовательно, $\max \Omega_0 \sim a/b$.

Из симметрии потенциальной ямы следует, что $m = 0$. Для определения дисперсии найдем

$$\begin{aligned} \langle U''(x) \rangle_r &= a \langle \delta(x+b) + \delta(x-b) \rangle_r = \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left(-\frac{b^2}{2D}\right) = \Pi(D). \end{aligned}$$

Тогда согласно (15.7.2) безразмерная дисперсия установившегося распределения $\Delta \equiv 2D/b^2$ должна определяться уравнением

$$\sqrt{\Delta} = \mathcal{D} \sqrt{\pi} (2ab)^{-1} e^{1/\Delta}.$$

Полоса марковского процесса $x(t)$ и значение его спектральной плотности в нуле на основании (15.7.1) равны

$$\Omega_0 = \frac{a \sqrt{\pi}}{b \sqrt{\pi}} e^{-1/\Delta}, \quad G^0 = \frac{b^3 \Delta \sqrt{\Delta}}{4a \sqrt{\pi}} e^{1/\Delta}. \quad (15.7.7)$$

Поскольку эти уравнения являются трансцендентными, то явно-го выражения для $\Omega_0(D)$, $G^0(D)$ найти не удастся. По этой причи-

не следует Ω_0 и G^0 определять из (15.7.7), пользуясь безразмерной дисперсией Δ как промежуточным параметром, который, в свою очередь, можно по заданному значению D находить из соотношения

$$\mathcal{D} = \frac{2ab}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\Delta}}{e^{1/\Delta}}.$$

Построенная таким образом зависимость $\Omega_0 = \Omega_0(\mathcal{D})$ изображена на рис. 15.11. Производная $d\Omega_0/d\mathcal{D}$ обращается в бесконечность при $\mathcal{D} = 0$, что соответствует, как уже выше качественно отмечалось, наибо́льшему возрастанию полосы спектра марковского процесса при росте интенсивности воздействующего шума.

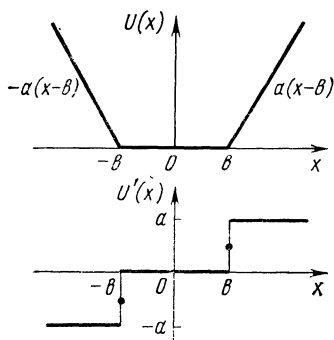


Рис. 15.10.

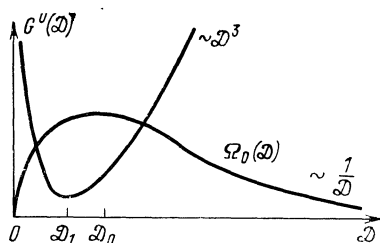


Рис. 15.11.

Максимальное значение

$$\max \Omega_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \frac{a}{b} = 0,76 \frac{a}{b}$$

приходится на $\mathcal{D}_0 = 2\sqrt{2/\pi e} ab$, чему соответствует $D = b^2$, что полностью подтверждает приведенный качественный анализ. При достаточно больших $\mathcal{D}$, таких, что $\mathcal{D} \gg \mathcal{D}_0$ ($D \gg b^2$), как и должно быть, $\Omega_0 = 2a^2/\mathcal{D}$.

Зависимость $G^0 = G^0(\mathcal{D})$ также показана на рис. 15.11. При малых значениях $\mathcal{D}$ имеют место большие значения G^0 , затем они уменьшаются до минимального значения

$$\min G^0 = \frac{b^3}{2a} \sqrt{\frac{2e}{\pi}},$$

а затем опять возрастают $\sim \mathcal{D}^3$. Минимум G^0 наступает несколько ранее максимума Ω_0 и соответствует

$$\mathcal{D}_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi e}} ab.$$

Таким образом, эволюция спектра марковского процесса $x(t)$ происходит следующим образом. При малой интенсивности возмущающего шума, когда «края» потенциальной ямы сказываются еще мало и броуновское движение близко к свободному, спектр имеет малую полосу и большую «высоту», так что он весьма близок к спектру свободного броуновского движения, пропорционального $\sim 1/\omega^2$. Затем при увеличении $\mathcal{D}$ полоса спектра резко возрастает, а его высота падает. Наиболее широкополосным спектр является при $D \sim \sim b^2$, когда жесткость системы максимальна, при этом его высота находится вблизи минимального значения. При дальнейшем росте

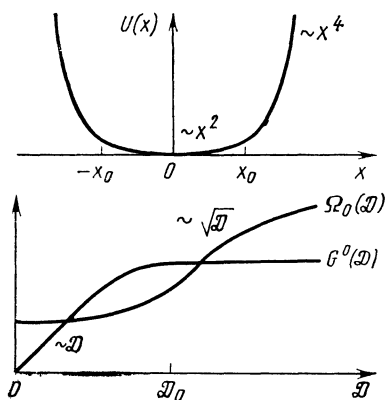


Рис. 15.12.

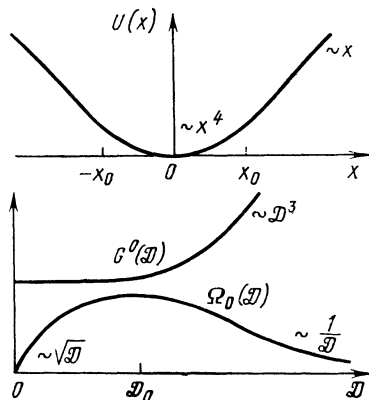


Рис. 15.13.

спектра входного шума выходной спектр опять начинает сужаться и подниматься и, наконец, при $\mathcal{D} \gg \mathcal{D}_0$ полоса спектра убывает $\sim \mathcal{D}^{-1}$, а высота возрастает пропорционально $\mathcal{D}^3$.

6. В конце предыдущего параграфа мы качественно рассмотрели зависимость $D = D(\mathcal{D})$ для трех видов потенциальных функций. Используя соотношения (15.7.1) для этих же самых функций, можно также качественно определить характер эволюции ширины и высоты спектра установившегося броуновского движения. На рис. 15.12 и 15.13 показаны эти зависимости для первой и третьей потенциальных функций.

7. Мы рассмотрели в гауссовом приближении спектральные характеристики марковского процесса $x(t)$, описываемого дифференциальным уравнением

$$dx/dt = -a(x) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — гауссов белый шум с интенсивностью $\mathcal{D}$.

Согласно § 15.2 гауссово приближение для указанного нелинейного дифференциального уравнения эквивалентно замене его «линейным» уравнением

$$dx/dt = -\Pi(m, D)x + \xi(t), \quad (15.7.8)$$

основной параметр которого — полоса — зависит от среднего значения и дисперсии выходной переменной. Допустим теперь, что полоса системы $\Omega_0 = \Omega_0(m, D) = (\pi/2)\Pi(m, D)$ нам известна. Можем ли мы считать, что на нашу систему эффективно действует только тот шум, который попадает в эту полосу? Именно так и обстоит дело и именно вследствие этого между дисперсией, шириной и высотой спектра имеет место соотношение (15.7.3). Но если это так, то выходной спектр $G_x(\omega)$ из-за постоянства спектральной плотности входного шума должен просто-напросто совпадать по форме с частотной характеристикой линеаризованной системы (15.7.8). Так оно и есть на самом деле, ибо частотная характеристика этой системы равна

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{|j\omega + \Pi(m, D)|^2} = \frac{1}{\Pi^2(m, D) + \omega^2},$$

и если ее умножить на $S_\xi(\omega) = \mathcal{D}/2\pi$ и учесть, что $2\Pi(m, D)D = \mathcal{D}$, то мы и получим выражение для $G_x(\omega)$.

Таким образом, все разнообразие поведения выходного спектра марковского процесса $x(t)$ при изменении $\mathcal{D}$ обязано по существу изменению полосы системы $\Pi = \Pi(\mathcal{D})$ и является ничем иным, как эволюцией частотной характеристики нелинейной системы при изменении интенсивности воздействующего на нее белого шума.

Глава 16

ИНЕРЦИОННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

16.1. Постановка задачи

1. В этой последней главе мы будем рассматривать нелинейное инерционное преобразование $u(t) \rightarrow x(t)$, представленное уравнением

$$dx/dt = f[x, u]. \quad (16.1.1)$$

Входной случайный процесс $u(t)$ может иметь теперь любое время корреляции и, следовательно, любую ширину спектра мощности. Он также может быть и сколь угодно медленным случайным процессом.

Для возможности применения аппарата марковских процессов к анализу нелинейной системы (16.1.1) необходимо, чтобы воздействующий процесс $u(t)$ являлся или марковским процессом, или его компонентой. При этом он может быть и негауссовым. Поскольку, однако, основная цель настоящей главы состоит в исследовании особенностей воздействия *гладких* шумов на нелинейную инерцион-

ную систему и, в частности, в выяснении тех условий, при которых входной процесс $u(t)$ может быть заменен белым шумом, нам достаточно ограничиться случаем гауссова стационарного марковского процесса $u(t)$, положив его среднее значение равным нулю.

В этом случае дифференциальным уравнением для $u(t)$ должно быть линейное уравнение

$$du/dt = -\gamma u + \xi(t) \quad (16.1.2)$$

с гауссовым стационарным белым шумом $\xi(t)$ интенсивностью $\mathcal{D}$ среднее значение которого также равно нулю.

Стационарный марковский процесс, описываемый уравнением (16.1.2), имеет следующие значения ковариационной функции, спектра и дисперсии:

$$B_u(\tau) = D_u e^{-\gamma |\tau|}, \quad S_u(\omega) = S_u^0 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \omega^2},$$

$$D_u = \frac{\mathcal{D}}{2\gamma}, \quad S_u^0 = \frac{\mathcal{D}}{2\pi\gamma^2} = \frac{D_u}{\pi\gamma}.$$

Поскольку этот процесс однозначно описывается всего двумя параметрами, то в качестве независимых заданных параметров выберем ширину и «высоту» его спектра, т. е. γ и S_u^0 .

2. Итак, нам предстоит отыскать статистические характеристики негауссова случайного процесса $x(t)$, его кумулянты и кумулянтные функции, а также спектр мощности и проанализировать их структуру и зависимости от параметров входного шума как для произвольной нелинейной функции $f[x, u]$, так и для некоторых ее частных случаев. Основное рассмотрение будет вестись в гауссовом приближении, а в отдельных случаях мы учтем и высшие приближения.

16.2. Гауссово приближение

1. Оставляя функцию $f[x, u]$ произвольной, ограничимся гауссовым приближением для совокупности $\{x, u\}$, заданной уравнениями (16.1.1), (16.1.2). Эта совокупность является марковской. Ее кинетические коэффициенты на основании (III.7), (III.8) равны

$$\begin{aligned} K_x &= f[x, u], \quad K_u = -\gamma u, \\ K_{xx} &= 0, \quad K_{xu} = 0, \quad K_{uu} = \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (16.2.1)$$

Чтобы записать уравнения эволюции кумулянтов, необходимо обратиться к § 10.10. Вместе с этим, поскольку мы ограничиваемся гауссовым приближением, нам следует принимать во внимание лишь кумулянты

$$\begin{aligned} \langle x \rangle, \quad \langle u \rangle, \\ \langle x, x \rangle, \quad \langle x, u \rangle, \quad \langle u, u \rangle, \end{aligned}$$

среди которых $\langle u \rangle = 0$ и $\langle u, u \rangle = D_u = \mathcal{D}/2\gamma = \pi\gamma S_u^0$ являются заданными. Незвестными остаются три кумулянта. Для них

согласно (10.10.7), (10.10.8), (16.2.1) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d\langle x \rangle}{dt} &= \langle f[x, u] \rangle_r, \\ \frac{d\langle x, x \rangle}{dt} &= 2\langle x, f[x, u] \rangle_r, \\ \frac{d\langle x, u \rangle}{dt} &= -\gamma\langle x, u \rangle_r + \langle u, f[x, u] \rangle_r.\end{aligned}$$

Здесь знаком $\langle \dots \rangle_r$ отмечено, что средние берутся по гауссовой совокупности $\{x, u\}$. Вычисляя эти средние, мы приходим к замкнутой системе трех уравнений для $\langle x \rangle$, $\langle x, x \rangle$, $\langle x, u \rangle$.

Установившиеся значения этих кумулянтов определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\langle f[x, u] \rangle_r &= 0, \quad \langle f'_x \rangle_r D_x + \langle f'_u \rangle_r \langle x, u \rangle = 0, \\ \langle f'_x \rangle_r \langle x, u \rangle + \langle f'_u \rangle_r D_u &= \gamma \langle x, u \rangle.\end{aligned}\tag{16.2.2}$$

Здесь мы воспользовались формулой (4.7.11).

2. Запишем теперь уравнения для кумулянтных функций установившегося стационарного процесса $x(t)$. В гауссовом приближении следует рассматривать следующие четыре кумулянтные функции:

$$\begin{aligned}\langle x, x_\tau \rangle &= B_x[\tau], \quad \langle x, u_\tau \rangle = B_{xu}[\tau], \\ \langle u, x_\tau \rangle &= B_{ux}[\tau], \quad \langle u, u_\tau \rangle = B_u[\tau],\end{aligned}$$

последняя из которых задана.

Заметим, что если кинетические уравнения для кумулянтных функций записывать и решать только для $\tau \geq +0$, то функции $B_{xu}[\tau]$ и $B_{ux}[\tau]$ могут получиться совершенно различными, они должны находиться независимо друг от друга.

На основании (10.11.16) получим следующие уравнения ($\tau \geq +0$):

$$\begin{aligned}\frac{dB_x[\tau]}{d\tau} &= \langle f'_x[x, u] \rangle_r B_x[\tau] + \langle f'_u[x, u] \rangle_r B_{xu}[\tau], \\ \frac{dB_{xu}[\tau]}{d\tau} &= -\gamma B_{xu}[\tau], \\ \frac{dB_{ux}[\tau]}{d\tau} &= \langle f'_x[x, u] \rangle_r B_{ux}[\tau] + \langle f'_u[x, u] \rangle_r B_u[\tau], \\ \frac{dB_u[\tau]}{d\tau} &= -\gamma B_u[\tau].\end{aligned}\tag{16.2.3}$$

Последнее уравнение удовлетворяется автоматически. Из второго уравнения следует $B_{xu}[\tau] = \langle x, u \rangle e^{-\gamma\tau}$.

Система (16.2.3) распадается на две отдельные, обладающие одинаковым характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} \langle f'_x \rangle_r + \lambda & \langle f'_u \rangle_r \\ 0 & \lambda - \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = -\langle f'_x \rangle_r \equiv \Pi > 0$, $\lambda_2 = \gamma > 0$ позволяют записать $B_x[\tau]$ и $B_{ux}[\tau]$ в виде

$$B_x[\tau] = A e^{-\Pi \tau} + B e^{-\gamma \tau},$$

$$B_{ux}[\tau] = C e^{-\Pi \tau} + E e^{-\gamma \tau}.$$

Здесь через Π аналогично § 15.2 обозначена полоса нелинейной системы (16.1.1). Входящие сюда коэффициенты легко находятся из начальных условий

$$A + B = D_x, \quad \Pi A + \gamma B = \Pi D_x - \langle f'_u \rangle_r \langle x, u \rangle = 0,$$

$$C + E = \langle x, u \rangle, \quad \Pi C + \gamma E = \Pi \langle x, u \rangle - \langle f'_u \rangle_r D_u = -\gamma \langle x, u \rangle.$$

Таким образом, ковариационная функция исследуемого процесса, которая в основном нас и интересует, имеет вид ($\tau \geq 0$)

$$B_x[\tau] = \frac{D_x}{\gamma - \Pi} [\gamma e^{-\Pi \tau} - \Pi e^{-\gamma \tau}]. \quad (16.2.4)$$

Отсюда элементарно находим спектр негауссова случайного процесса $x(t)$ в гауссовом приближении:

$$S_x(\omega) = m_x^2 \delta(\omega) + G_x^0 \frac{\Pi^2 \gamma^2}{(\Pi^2 + \omega^2)(\gamma^2 + \omega^2)},$$

$$G_x^0 = \frac{D_x}{\pi} \frac{\Pi + \gamma}{\Pi \gamma}. \quad (16.2.5)$$

3. Итак, мы записали основные статистические характеристики случайного процесса $x(t)$, полученного в результате нелинейного инерционного преобразования марковского процесса $u(t)$. Обсудим полученные результаты. Вид найденного спектра позволяет предположить, что в гауссовом приближении нелинейная инерционная система статистически эквивалентна некоторой линейной системе, т. е. что имеет место ситуация, подобная той, с которой мы уже встречались в § 15.2. На эту же мысль наводит и вид уравнений (16.2.3) для ковариационных функций.

Нетрудно убедиться в том, что это действительно так и что линейной системой, эквивалентной (16.1.1), (16.1.2), является система, описываемая уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = -\Pi x + \langle f'_u[x, u] \rangle_r u,$$

$$\frac{du}{dt} = -\gamma u + \xi. \quad (16.2.6)$$

Отсюда легко получить (16.2.3). Кроме того, из (16.2.6) сразу же следует

$$G_x(\omega) = \frac{\langle f'_u \rangle_{\Gamma}^2 S_u(\omega)}{\Pi^2 + \omega^2} = \frac{\langle f'_u \rangle_{\Gamma}^2 D_u \gamma}{\pi (\Pi^2 + \omega^2) (\gamma^2 + \omega^2)}. \quad (16.2.7)$$

Если теперь D_x с помощью (16.2.2) выразить через D_u , то легко проверить, что (16.2.5) переходит в (16.2.7).

Таким образом, линеаризованная система (16.2.6) статистически эквивалентна исходной нелинейной системе, если случайный процесс $x(t)$ ищется в гауссовом приближении. Вместе с этим, поскольку второе уравнение в обеих системах осталось без изменения, это значит, что гауссово приближение (для совокупности $\{x, u\}$) эквивалентно замене нелинейного уравнения

$$dx/dt = f[x, u] \quad (16.2.8)$$

линейным

$$dx/dt = \langle f'_x[x, u] \rangle_{\Gamma} x + \langle f'_u[x, u] \rangle_{\Gamma} u. \quad (16.2.9)$$

4. Последнее обстоятельство весьма важно и интересно. В § 15.1 мы уже указывали на то, что методом кумулянтного анализа, в принципе, можно исследовать нелинейное инерционное преобразование $u(t) \rightarrow x(t)$, представленное уравнением (16.2.9), и для произвольного случайного процесса $u(t)$, а не только для марковского. Если оставаться в рамках гауссова приближения, нетрудно прийти к (16.2.9), не требуя марковости $u(t)$. В самом деле, запишем уравнение для ковариационной функции негауссова стационарного процесса $x(t)$

$$\frac{dB_x[\tau]}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \langle x, x_{\tau} \rangle = \left\langle x, \frac{dx_{\tau}}{d\tau} \right\rangle = \langle x, f[x_{\tau}, u_{\tau}] \rangle.$$

Используя первую формулу размыкания (7.7.6), получим

$$\frac{dB_x[\tau]}{d\tau} = \sum_{\substack{k, l=0 \\ k+l > 0}}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \left\langle \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial u^l} f[x, u] \right\rangle \kappa_{1, k, l}^{x, x_{\tau}, u_{\tau}}.$$

Ограничившись гауссовой совокупностью $\{x, u\}$, отсюда сразу же приходим к первому уравнению (16.2.3). Аналогичным образом получим и третье уравнение. В свою очередь, эти уравнения при гауссовых x, u однозначно приводят к (16.2.9).

Таким образом, при анализе инерционного нелинейного преобразования (16.1.1) использование гауссового приближения оставляет свободу выбора для уравнения, определяющего гауссов процесс $u(t)$. Так, в частном случае узкополосного процесса $u(t)$, определяемого уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\gamma \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — гауссов белый шум, мы можем в гауссовом приближении его воздействие на нелинейную инерционную систему статистически эквивалентно представлять линейными уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\Pi x + \langle f'_u \rangle_r u, \\ \frac{d^2 u}{dt^2} &= -2\gamma \frac{du}{dt} - \omega_0^2 u + \xi(t),\end{aligned}$$

которые могут быть решены без особого труда.

16.3. Условия широкополосности и квазистатичности воздействия

1. Разберем теперь поставленный выше вопрос о том, каким условиям должен удовлетворять гладкий широкополосный шум $u(t)$, воздействующий на нелинейную инерционную систему

$$dx/dt = f[x, u], \quad (16.3.1)$$

чтобы его можно было считать белым шумом, а случайный процесс $x(t)$ — марковским.

Для этого сравним результаты, полученные в § 15.2 для уравнения

$$dx/dt = f[x, \xi], \quad (16.3.2)$$

где $\xi(t)$ — гауссов белый шум с интенсивностью $\mathcal{D}$, с результатами § 16.2 применительно к системе уравнений

$$\begin{aligned}dx/dt &= f[x, u], \\ du/dt &= -\gamma u + \gamma \xi.\end{aligned} \quad (16.3.3)$$

Здесь во втором уравнении перед $\xi(t)$ специально введен множитель γ для того, чтобы при $\gamma \rightarrow \infty$ гладкий шум $u(t)$ переходил в белый $\xi(t)$. И вот это математическое условие $\gamma \rightarrow \infty$ мы должны заменить физическим, указав, по сравнению с чем должна быть велика γ — полоса гладкого шума $u(t)$.

Начнем со сравнения спектров случайного процесса $x(t)$. Из (16.2.5) следует, что для $x(t)$, определенного системой (16.3.3), спектр флуктуаций равен

$$G_x(\omega) = \frac{D_x}{\pi} \frac{\Pi \gamma (\Pi + \gamma)}{(\Pi^2 + \omega^2)(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (16.3.4)$$

где $\Pi \equiv -\langle f'_x[x, u] \rangle_r$. Формула, дающая значение спектра $x(t)$ для (16.3.2), имеет вид [см. (15.2.8)]

$$\tilde{G}_x(\omega) = \frac{\tilde{D}_x}{\pi} \frac{\tilde{\Pi}}{\tilde{\Pi}^2 + \omega^2}, \quad (16.3.5)$$

где $\tilde{\Pi} \equiv -\langle K_1(x) \rangle_r$.

Сравнивая (16.3.4) и (16.3.5), легко видеть, что $G_x(\omega) \rightarrow \tilde{G}_x(\omega)$, если при $\Pi/\gamma \rightarrow 0$ $D_x \rightarrow \tilde{D}_x$ и $\Pi \rightarrow \tilde{\Pi}$. Последнее условие становится очевидным, если учесть, что

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi} &= -\langle K'_1(x) \rangle_\Gamma = -\left\langle \frac{d}{dx} \langle f[x, \xi] \rangle_\xi \right\rangle_x = \\ &= -\langle f'_x[x, \xi] \rangle_{\xi, x}\end{aligned}$$

и что $u(t) \rightarrow \xi(t)$ при $\gamma \rightarrow \infty$.

Что касается дисперсии и среднего значения случайного процесса, то мы должны сравнить уравнения (16.2.2), которые можно записать в виде

$$\langle f[x, u] \rangle_\Gamma = 0, \quad D_x = \frac{\mathcal{D}}{2\Pi} \frac{\langle f'_u[x, u] \rangle_\Gamma^2 \gamma}{\gamma + \Pi},$$

с уравнениями (15.2.4)

$$\langle f[x, \xi] \rangle_\Gamma = 0, \quad \tilde{D}_x = \frac{\langle K_2(x) \rangle_\Gamma}{2\tilde{\Pi}} = \frac{\mathcal{D}}{2\tilde{\Pi}} B^2(\tilde{m}_x, \tilde{D}_x).$$

Из сопоставления (16.3.2) и (15.2.10) следует, что

$$B(m, D) = \langle f'_\xi[x, \xi] \rangle_{\xi, x}.$$

Таким образом, при $\Pi/\gamma \rightarrow 0$ мы получаем $m_x \rightarrow \tilde{m}_x$, $D_x \rightarrow \tilde{D}_x$. Это означает, что если полоса широкополосного шума много больше полосы нелинейной системы

$$\gamma \gg \Pi = -\langle f'_x[x, u] \rangle_\Gamma, \quad (16.3.6)$$

то этот широкополосный шум можно считать дельта-коррелированным, а случайный процесс $x(t)$ — марковским. Таким образом, условие (16.3.6) и есть *условие широкополосности* воздействующего шума $u(t)$.

Важно заметить, однако, что поскольку заданный гауссов шум $u(t)$ однозначно определяется шириной полосы γ и значением спектральной плотности на нулевой частоте S_u^0 , то и полоса нелинейной системы сама в конце концов зависит от γ и S_u^0 . Это значит, что условие широкополосности

$$\gamma \gg \Pi(\gamma, S_u^0) \quad (16.3.7)$$

является по существу *уравнением* для γ , в которое параметром входит S_u^0 . Это приводит к тому, что в общем случае требование к полосе шума $u(t)$ будет *различным* при различных значениях S_u^0 . Одна и та же величина полосы воздействующего шума может удовлетворять или не удовлетворять условию широкополосности в зависимости от того, какое значение имеет S_u^0 . Эта взаимозависимость γ и S_u^0 является следствием нелинейности системы, и параметр ее нелинейности, конечно, входит в выражение для полосы Π .

2. Рассмотрим теперь в том же гауссовом приближении условие квазистатичности воздействия шума $u(t)$ на нелинейную инерцион-

ную систему. Это условие означает, что мы рассматриваем такой медленный процесс $x(t)$, для которого производной dx/dt можно пренебречь по сравнению с правой частью уравнения (16.3.1) и тем инерционное нелинейное преобразование $u(t) \rightarrow x(t)$ свести к безынерционному, определяемому уравнением

$$f[x, u] = 0. \quad (16.3.8)$$

Совершенно очевидно, что такая ситуация справедлива, если воздействующий шум $u(t)$ достаточно медленен, ибо в этом случае порождаемый случайный процесс $x(t)$ также становится медленным.

Вместе с этим, вопрос может быть поставлен и по-другому. Пусть $u(t)$ — быстрый процесс, который, в свою очередь, порождает также быстрый выходной процесс $x(t)$, так что в общем случае производной dx/dt пренебрегать нельзя. Однако если в спектре быстрого процесса $x(t)$ рассматривать только спектральные компоненты, приходящие к нулю, то кажется очевидным, как это отмечалось в § 15.5, что для таких медленных компонент также можно пренебрегать производной и находить их статистические характеристики из безынерционного уравнения (16.3.8).

Согласно (16.2.6), в гауссовом приближении исходное уравнение (16.3.1) может быть записано как

$$dx/dt = -\Pi x + \langle f'_u[x, u] \rangle_r u.$$

Следовательно, условие квазистатичности в гауссовом приближении сводится к тому, что преобразование $u \rightarrow x$ принимает вид

$$x = \langle f'_u[x, u] \rangle_r \Pi^{-1} u.$$

Отсюда следует, во-первых, что медленности $x(t)$ должна обязательно соответствовать медленность $u(t)$ и, во-вторых, что спектр $x(t)$ равен

$$G_x(\omega) = \langle f'_u[x, u] \rangle_r^2 \Pi^{-2} S_u(\omega).$$

Сравнивая это выражение с (16.2.7), видим, что условие квазистатичности эквивалентно тому, что полоса спектра $S_u(\omega)$ должна быть много меньше полосы нелинейной системы:

$$\gamma \ll \Pi(\gamma, S_u^0). \quad (16.3.9)$$

Другими словами, условие квазистатичности является обратным условию широкополосности, а это означает, что нахождение статистических характеристик медленных компонент выходного шума $x(t)$ с помощью безынерционного преобразования (16.3.8) при широкополосном выходном шуме невозможно, хотя, как отмечалось выше, и представлялось очевидным. Дело здесь в том, что это было бы возможным, если бы медленные компоненты $x(t)$ определялись только медленными компонентами $u(t)$, как это имеет место для линейной системы. Для нелинейной же системы, как неоднократно упоминалось выше (см. гл. 14), медленные спектральные компоненты определяются биениями спектральных составляющих, расположенных во

всех частях спектра. Говоря по-другому, в нелинейной системе медленные компоненты $x(t)$ определяются *всем спектром* входного процесса $u(t)$.

3. В условие квазистатичности (16.3.9), так же как и в условие широкополосности (16.3.7), входит параметр нелинейности и значение S_u^0 . Это ведет к тому, что, в принципе, может быть, например, такая ситуация, когда при фиксированной полосе входного шума $u(t)$ при одних значениях S_u^0 этот шум удовлетворяет условию квазистатичности, а при других значениях S_u^0 — условию широкополосности. Такой конкретный пример будет приведен ниже.

Условия (16.3.7) и (16.3.9) получены нами в гауссовом приближении. Естественно, возникает вопрос, изменятся ли эти условия и как именно, если учесть следующие приближения: эксцессное, приближение шестого порядка и т. д.? Можно ли говорить о подобных условиях безотносительно к приближениям?

Как будет показано ниже на конкретном примере, учет эксцессного и последующих приближений, не изменяя, по существу, самих условий широкополосности и квазистатичности, приводит лишь к численному уточнению значения полосы $\Pi(\gamma, S_u^0)$. Это позволяет предполагать, что условия (16.3.7), (16.3.9) справедливы всегда, и все дело лишь в точном вычислении самой полосы нелинейной системы:

$$\Pi(\gamma, S_u^0) \equiv -\langle f'_x[x, u] \rangle.$$

В известной литературе условия широкополосности или квазистатичности воздействия шума на нелинейную инерционную систему, как правило, формулируются в терминах постоянных времени (см., например, [5, 9]). Сравнивают время корреляции входного процесса τ_h с «характерной постоянной времени системы» τ_c . Что касается входного шума, то совершенно ясно, что $\tau_h = \gamma^{-1}$. Однако не совсем правильно определяется τ_c для нелинейной инерционной системы. Ее определяют как время релаксации самой системы (см., например, [5]), не обращая внимания на характеристики воздействующего шума. Это неправильный подход, ибо, как мы получили выше, из-за нелинейности системы ее время релаксации τ_c весьма существенным образом зависит от характера и параметров воздействующего шума и не может служить характеристикой только самой по себе нелинейной системы. Это значит, что мы должны положить $\tau_c \equiv \Pi^{-1}(\gamma, S_u^0) = \tau_c(\tau_h, S_u^0)$ и соотношения, вытекающие из (16.3.7), (16.3.9), записывать не между τ_h и будто бы независимой от нее τ_c , а между τ_h и $\tau_c = \tau_c(\tau_h, S_u^0)$, т. е. записывать *уравнения* широкополосности и квазистатичности. А это, как уже было сказано выше, приведет нас к тому, что при одном и том же значении τ_h соотношение между τ_h и τ_c может быть совершенно различным в зависимости от величины S_u^0 .

16.4. Инерционная система с кубической нелинейностью

1. Разберем теперь подробнее и обстоятельнее закономерности преобразования инерционной нелинейной системой гладкого шума на конкретном примере уже рассмотренной выше системы с кубической нелинейностью. Пусть стационарный гауссов шум $u(t)$ с корреляционной функцией $B_u[\tau] = D_u e^{-\gamma|\tau|}$ преобразуется нелинейной инерционной системой в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned} dx/dt &= -ax^3 + u(t), \\ du/dt &= -\gamma u + \xi(t), \end{aligned} \quad (16.4.1)$$

где $\xi(t)$ — белый гауссов шум. Полагая, что входной случайный процесс задается шириной γ и значением в нуле S_u^0 его спектра, для его дисперсии и интенсивности белого шума получаем следующие выражения:

$$D_u = \pi\gamma S_u^0, \quad \mathcal{D} = 2\pi\gamma^2 S_u^0 = 2\gamma D_u. \quad (16.4.2)$$

Мы не будем анализировать здесь процессы установления кумулянтов стационарного распределения (этим мы займемся в следующем параграфе), а уделим внимание преобразованию спектров $S_u(\omega) \rightarrow G_x(\omega)$, полагая, что переходные процессы закончились и выходной процесс стал стационарным. Кроме того, в этом параграфе мы ограничимся гауссовым приближением.

2. Отыщем сначала установившиеся значения кумулянтов совокупности $\{x, u\}$. Согласно (16.2.2) уравнения для них имеют вид:

$$\begin{aligned} -a\langle x^3 \rangle + \langle u \rangle &= 0, \\ -3a\langle x^2 \rangle D_x + \langle x, u \rangle &= 0, \\ -3a\langle x^2 \rangle \langle x, u \rangle + D_u &= \gamma \langle x, u \rangle. \end{aligned}$$

Выражая входящие сюда средние через кумулянты и учитывая, что $\langle u \rangle = 0$, найдем

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= 0, \\ \langle x, u \rangle &= 3aD_x^2, \\ (\gamma + 3aD_x)\langle x, u \rangle &= D_u. \end{aligned}$$

Таким образом, среднее значение выходного случайного процесса равно нулю, совместный кумулянт выражается через дисперсию, которая, в свою очередь, удовлетворяет кубическому уравнению

$$9a^2 D_x^3 + 3a\gamma D_x^2 = D_u. \quad (16.4.3)$$

Поскольку дисперсии положительны, то значение D_x является единственным положительным корнем этого алгебраического уравнения.

Для последующего удобнее, однако, и дисперсию, и совместный кумулянт выражать через полосу рассматриваемой нелинейной си-

стемы, равную в гауссовом приближении

$$\Pi \equiv -\langle f'_x [x, u] \rangle_r = 3a \langle x^2 \rangle = 3aD_x.$$

Таким образом,

$$D_x = \Pi/3a, \quad \langle x, u \rangle = \Pi^2/3a. \quad (16.4.4)$$

Для полосы из (16.4.3) легко находим уравнение

$$\Pi^3 + \gamma \Pi^2 = 3aD_u = 3\pi\alpha\gamma S_u^0 \equiv \Delta^2\gamma, \quad (16.4.5)$$

где мы обозначили через $\Delta \equiv \sqrt{3\pi\alpha S_u^0}$ некоторую характерную полосу, зависящую от нелинейности системы и спектра воздействующего шума. Ниже выяснится смысл этой полосы.

Необходимо отметить, что из (16.4.5) отчетливо видно, какими параметрами определяется полоса системы. Весьма важным обстоятельством, которое в общих чертах уже отмечалось выше, является то, что полоса нашей нелинейной инерционной системы зависит не только от параметра нелинейности a , являющегося характеристикой собственно системы, но и от полного набора параметров входного шума.

Введя отношение полосы системы к полосе воздействующего шума $\delta \equiv \Pi/\gamma$, для относительной полосы получим следующее основное уравнение гауссова приближения:

$$\delta^3 + \delta^2 = \mu^2, \quad (16.4.6)$$

где безразмерный коэффициент

$$\mu = \frac{\Delta}{\gamma} \equiv \frac{\sqrt{3\pi\alpha S_u^0}}{\gamma} = \sqrt{\frac{3aD_u}{\gamma^3}} \quad (16.4.7)$$

описывает характеристику входного шума с учетом нелинейности системы. Назовем этот коэффициент *индексом шума*. Индекс шума является, как это будет видно далее, определяющей характеристикой шума, воздействующего на нелинейную систему.

Алгебраическое уравнение (16.4.6) является численным. Нас интересует положительный корень этого уравнения, и далее под δ мы будем понимать именно этот корень, который, очевидно, зависит от значения μ :

$$\delta = Q(\mu). \quad (16.4.8)$$

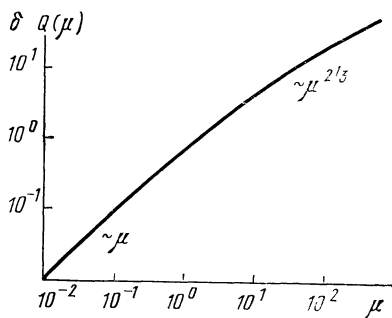


Рис. 16.1.

На рис. 16.1 изображен график этой функции, асимптотические значения которой равны

$$Q(\mu) = \begin{cases} \mu, & \mu \ll 1, \\ \mu^{2/3}, & \mu \gg 1. \end{cases} \quad (16.4.9)$$

Если договориться о том, что два знака неравенства означают порядок (10^1), а три знака неравенства будут означать полтора порядка ($10^{1.5} = 10 \cdot \sqrt{10}$), то это значит, что нижняя строчка в (16.4.9) будет достаточно точно представлять $Q(\mu)$ при значениях μ , равных и больших 30.

Тем самым, задавая значение индекса шума согласно (16.4.8) находим δ , а затем и искомые значения полосы и кумулянтов

$$\Pi = \gamma Q(\mu), \quad D_x = \frac{\gamma}{3a} Q(\mu), \quad \langle x, u \rangle = \frac{\gamma^2 Q^2(\mu)}{3a}. \quad (16.4.10)$$

3. Рассмотрим случай малого индекса шума $\mu \ll 1$, для которого

$$\begin{aligned} \Pi = \gamma\mu = \Delta = \sqrt{3\pi a S_u^0} \ll \gamma, \quad D_x = \frac{\gamma\mu}{3a} = \frac{\Delta}{3a} = \\ = \sqrt{\frac{\pi S_u^0}{3a}}, \quad \langle x, u \rangle = \pi S_u^0. \end{aligned} \quad (16.4.11)$$

Как следует отсюда, малый индекс шума имеет место в том случае, когда полоса системы много меньше полосы воздействующего шума, причем значения полосы системы и кумулянтов в этом случае вообще не зависят от γ , а только от S_u^0 . Это значит, что в формулах (16.4.11) ничего не изменится, если устремить γ к бесконечности, т. е. если случайный процесс $u(t)$ заменить белым шумом. Таким образом, условие малости индекса шума

$$\Delta = \sqrt{3\pi a S_u^0} \ll \gamma \quad (16.4.12)$$

есть не что иное, как условие широкополосности (16.3.7), поскольку в данном случае $\Pi = \Delta$. Таким образом, введенная выше характеристическая полоса Δ есть не что иное, как полоса системы при «белом шумовом» воздействии.

Условие малости индекса шума (16.4.12) определяет взаимоотношение высоты и ширины его спектра, причем в это взаимоотношение «включена» нелинейность системы. Шум имеет малый индекс, если он быстр и если мала нелинейность системы. Однако условие малости индекса шума может нарушиться, если при неизменных характеристиках шума S_u^0 и γ нелинейность системы сильно возрастет. Это значит, что сам по себе шум, обладающий, скажем, малым значением S_u^0 и большой шириной спектра, еще не может считаться широкополосным, если не указано значение нелинейности системы. Более того, согласно (16.4.12), именно присутствие в этом соотноше-

нии нелинейности и позволяет установить, по сравнению с чем должна быть мала высота спектра S_u^0 или велика полоса γ .

Как и должно быть, выражения (16.4.11) для полосы случайного процесса $x(t)$ (а при широкополосном воздействии полоса выходного процесса совпадает с полосой системы) и кумулянтов при учете (16.3.3), (16.4.2) совпадают с тем, что было получено ранее для воздействия белого шума [ср. с (15.4.8), (15.5.1)].

4. Пусть теперь индекс шума велик, так что

$$\Delta = \sqrt[3]{3\pi a S_u^0} \gg \gamma. \quad (16.4.13)$$

В этом случае выражения (16.4.10) переходят в

$$\begin{aligned} \Pi &= \gamma \mu^{2/3} = \sqrt[3]{\gamma \Delta^2} = \sqrt[3]{3\pi a \gamma S_u^0} = \sqrt[3]{3a D_u}, \\ D_x &= \sqrt[3]{\frac{\pi \gamma S_u^0}{9a^2}} = \sqrt[3]{\frac{D_u}{9a^2}}, \quad \langle x, u \rangle = \sqrt[3]{\frac{D_u^2}{3a}}. \end{aligned} \quad (16.4.14)$$

Большое значение индекса шума будет тогда, когда воздействующий шум является достаточно медленным или когда велика нелинейность системы. С другой стороны, условие (16.4.13) означает, что

$$\Pi = \sqrt[3]{\gamma \Delta^2} \gg \gamma,$$

т. е. что при большом индексе шума имеет место квазистатическое воздействие этого шума на нелинейную систему [ср. с (16.3.9)]. Это приведет нас в гауссовом приближении, согласно (16.2.6) и (16.4.1), к $x = u/\Pi$, откуда мы элементарно находим

$$D_x = D_u/\Pi^2, \quad \langle x, u \rangle = D_u/\Pi,$$

что, как и должно быть, полностью совпадает с (16.4.14).

Шум, обладающий большим индексом, воздействует на нелинейную систему своей дисперсией, т. е. своей мощностью, что отчетливо видно из (16.4.4), и это понятно, ибо такой шум полностью «влезает» в полосу системы и на статистические характеристики одномерного распределения выходной переменной действует целиком, независимо от конкретной формы его спектра. Шум, обладающий малым индексом, согласно (16.4.11), воздействует на систему лишь значением своего спектра на нулевой частоте.

В точности такая же ситуация встречается в теории стохастической модуляции (см., например, [35]), где аналогичную роль играет понятие *индекса модуляции*. Эта аналогия и объясняет, почему параметр μ мы называли индексом шума.

В случае произвольного значения индекса шума для нахождения основных характеристик: полосы системы и дисперсии выходной переменной, мы должны обращаться к графику функции $Q(\mu)$ и тогда

$$\Pi = \gamma Q\left(\frac{\sqrt[3]{3\pi a S_u^0}}{\gamma}\right), \quad D_x = \frac{\gamma}{3a} Q\left(\frac{\sqrt[3]{3\pi a S_u^0}}{\gamma}\right). \quad (16.4.15)$$

Если полоса и высота спектра входного шума фиксированы, то все определяется нелинейностью системы a . При малой нелинейности может быть случай широкополосного воздействия (когда малость нелинейности ведет к малому значению полосы), а при большой нелинейности системы тот же самый шум может оказывать на систему уже квазистатическое действие (в этом случае большая нелинейность сделала полосу системы большой по сравнению с полосой шума).

5. Перейдем теперь к анализу спектра выходного случайного процесса $x(t)$. Согласно (16.2.7)

$$S_x(\omega) = S_x^0 \frac{\Pi^2 \gamma^2}{(\Pi^2 + \omega^2)(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (16.4.16)$$

где

$$S_x^0 = \frac{S_u^0}{\Pi^2} = \frac{1}{3a\pi} \frac{\gamma + \Pi}{\gamma} = \frac{1}{3a\pi} (1 + \delta).$$

Если рассматривать Ω_x — энергетическую полосу спектра случайного процесса $x(t)$, то из (16.4.16) найдем

$$\Omega_x = \frac{\pi}{2} \frac{\Pi \gamma}{\Pi + \gamma} = \frac{\pi}{2} \frac{\Pi}{1 + \delta} = \frac{\pi}{2} \frac{\gamma}{1 + 1/\delta}.$$

Эта формула показывает, что полоса выходного шума есть «параллельное соединение» полосы воздействующего шума и полосы системы.

Используя (16.4.15), можно записать следующие общие соотношения для S_x^0 и полосы спектра выходного случайного процесса:

$$S_x^0 = [1 + Q(\mu)]/3a\pi,$$

$$\Omega_x = \frac{\pi}{2} \frac{\Pi}{1 + Q(\mu)} = \frac{\pi}{2} \frac{\gamma}{1 + Q^{-1}(\mu)}.$$

Таким образом, мы имеем полную информацию о спектре гладкого процесса, прошедшего через инерционную нелинейную систему с кубической нелинейностью. Мы знаем форму спектра, его значение в нуле и ширину.

Разберем теперь, как деформируется спектр при изменении параметров входного шума.

Пусть высота спектра входного шума изменяется от малых ($\mu \ll 1$) до больших значений ($\mu \gg 1$), а полоса спектра γ остается при этом постоянной. Тогда энергетическая полоса спектра Ω_x будет равна

$$\frac{\pi}{2} \Pi = \frac{\pi}{2} \Delta = \frac{\pi}{2} \sqrt{3\pi a S_u^0},$$

т. е. будет расти $\sim \sqrt{S_u^0}$, оставаясь при этом много меньше γ , пока $\delta \ll 1$. Затем при дальнейшем росте μ она возрастет до величины $(\pi/2) \gamma$ и уже не будет ее превышать, как бы ни возрастала высота входного спектра. Высота спектра S_x^0 ведет себя при возрастании

S_u^0 иначе. Сначала она сохраняет постоянное значение, равное $1/3\pi a$ для всех тех μ , при которых $\delta \ll 1$. Затем она начинает возрастать и при больших значениях μ растет пропорционально $\sqrt[3]{S_u^0} \sim \mu^{2/3}$.

Общий вид эволюции выходного спектра при непрерывном возрастании высоты входного спектра показан на рис. 16.2. Наблюдается весьма интересная картина эволюции. Сначала при малых значениях S_u^0 имеет место режим расширения спектра (при постоянном

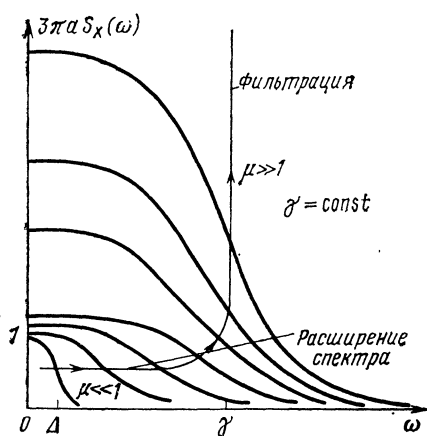


Рис. 16.2.

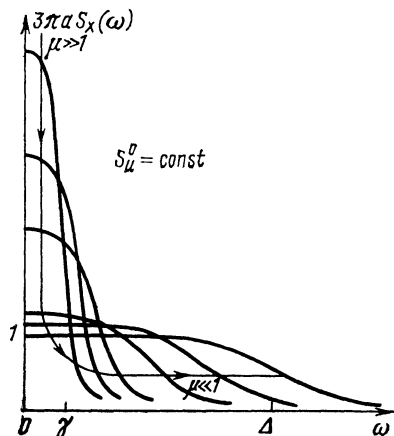


Рис. 16.3.

значении S_x^0), а затем наступает режим фильтрации, когда S_x растет, а полоса не меняется. Переходная область от одного режима к другому соответствует значению $\mu \simeq \sqrt{2}$ ($\delta \simeq 1$). Такой необычностью картина эволюции выходного спектра обязана, разумеется, нелинейности инерционной системы.

Другой характер изменения выходного спектра наблюдается при $S_u^0 = \text{const}$ и росте полосы входного спектра от малых значений ($\mu \gg 1$) до больших ($\mu \ll 1$). В этом случае полоса $\Delta = \sqrt{3\pi a S_u^0}$ постоянна, а индекс шума уменьшается. Высота выходного спектра при росте γ падает от больших значений $\delta/3\pi a$ (при $\mu \gg 1$, $\delta \gg 1$) до значения, равного $1/3\pi a$ (при $\mu \ll 1$), а ширина выходного спектра возрастает от малых значений $\pi\gamma/2$ ($\delta \gg 1$) до $\Omega_x = \pi\Delta/2$ ($\delta \ll 1$), оставаясь далее неизменной, хотя ширина входного спектра растет неограниченно. Общий вид такой эволюции показан на рис. 16.3.

16.5. Структура высших кумулянтов

1. Исследуем высшие кумулянты марковской совокупности $\{x, u\}$, заданной уравнениями

$$dx/dt = -ax^3 + u, \quad du/dt = -\gamma u + \xi. \quad (16.5.1)$$

На основании (10.10.11) уравнения эволюции совместных кумулянтов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \kappa_{p,q}^{x,u} = & -pa \langle x^{[p-1]}, u^{[q]}, x^3 \rangle + p \langle x^{[p-1]}, u^{[q+1]} \rangle - \\ & - q\gamma \langle x^{[p]}, u^{[q]} \rangle + \frac{q(q-1)}{2} \langle x^{[p]}, u^{[q-2]}, \mathcal{D} \rangle, \end{aligned} \quad (16.5.2)$$

Последнее слагаемое в правой части (16.5.2) отлично от нуля только для значений $p = 0$, $q = 2$ и в этом случае оно равно $\mathcal{I}$. Другими словами, интенсивность белого шума $\xi(t)$ входит только в уравнение для D_u . Поскольку дисперсию случайного процесса $u(t)$ мы полагаем заданной, постольку уравнение для нее рассматривать не будем, и поэтому последнее слагаемое в (16.5.2) можно не учитывать. Тогда уравнения кумулянтов принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \kappa_{p,q}^{x,u} = & -pa \langle x^{[p-1]}, x^3, u^{[q]} \rangle + p\kappa_{p-1,q+1}^{x,u} - \\ & - q\gamma \kappa_{p,q}^{x,u}. \end{aligned} \quad (16.5.3)$$

Найдем зависимость кумулянтов выходного процесса $x(t)$ и времен их релаксации от характеристик воздействующего шума S_u^0 , γ и параметра нелинейности системы a . Для этого запишем уравнения (16.5.3) в безразмерной форме. Соотношения, определяющие установившиеся значения D_x и $\langle x, u \rangle$, имеют вид

$$a \langle x, x^3 \rangle = \langle x, u \rangle, \quad \gamma \langle x, u \rangle + a \langle x^3, u \rangle = D_u.$$

Анализируя их, нетрудно прийти к следующему представлению совокупности $\{x, u\}$ через безразмерные переменные $\{w, v\}$:

$$x = \sqrt[4]{\frac{D_u}{a\gamma}} w, \quad u = \sqrt[4]{\frac{aD_u^3}{\gamma^3}} v. \quad (16.5.4)$$

Записывая кинетическое уравнение, например, для $\langle x \rangle$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = -a \langle x^3 \rangle$$

и учитывая (16.5.4), легко найти переход от t к безразмерному времени Θ :

$$t = \tau_0 \Theta, \quad \tau_0 = \sqrt[4]{\frac{\gamma}{aD_u}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a\pi S_u^0}}. \quad (16.5.5)$$

С помощью (16.5.4), (16.5.5) от (16.5.3) без труда переходим к следующим уравнениям для кумулянтов безразмерной марковской совокупности $\{w, v\}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Theta} \kappa_{p,q}^{w,v} = & -p \langle w^{[p-1]}, w^3, v^{[q]} \rangle + p\kappa_{p-1,q+1}^{w,v} - \\ & - q\gamma \kappa_{p,q}^{w,v}. \end{aligned} \quad (16.5.6)$$

Здесь введен параметр

$$\varepsilon = \gamma \tau_0 = \gamma \sqrt{\frac{\gamma}{a D_u}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi a S_u^0}} = \frac{\sqrt{3}}{\mu},$$

который показывает определяющее влияние индекса воздействующего шума [см. (16.4.7)] на численные характеристики как самих значений установившихся кумулянтов $\kappa_{p,q}^{w,v}$, так и их времен релаксации.

Поскольку воздействующий на нелинейную систему случайный процесс $u(t)$ заменен безразмерным процессом $v(t)$, то его характеристики мы также полагаем заданными. Он является гауссовым, его среднее значение равно нулю, а дисперсия, как нетрудно найти из (16.5.4), определяется уравнением

$$D_u = \frac{D_u}{\gamma} \sqrt{\frac{a D_u}{\gamma}} D_v,$$

откуда получаем $D_v = \gamma \tau_0 = \varepsilon = \sqrt{3/\mu}$.

Таким образом, кумулянты совокупности $\{x, u\}$ равны

$$\kappa_{p,q}^{x,u} = \left(\frac{D_u}{a\gamma}\right)^{p/4} \left(\frac{a D_u^3}{\gamma^3}\right)^{q/4} \kappa_{p,q}^{w,v}(\varepsilon).$$

2. Итак, мы пришли к следующим точным выражениям кумулянтов случайного процесса $x(t)$:

$$\kappa_s^x(t) = \left(\frac{\pi S_u^0}{a}\right)^{s/4} \kappa_s^w\left(\mu, \frac{t}{\tau_0}\right),$$

где безразмерные кумулянты $\kappa_s^w(\mu, \Theta)$ находятся из системы уравнений (16.5.6), в которую входят только численные коэффициенты. Времена релаксации этих кумулянтов равны $\tau_p = \tau_0 \Theta_p$, где набор чисел $\Theta_p = \Theta_p(\mu)$ определяется системой (16.5.6). Таким образом, времена релаксации кумулянтов исследуемого немарковского процесса $x(t)$ существеннейшим образом зависят как от параметра нелинейности системы, так и от параметров воздействующего шума.

Проанализируем теперь систему уравнений (16.5.6). Уравнения для кумулянтов случайного процесса $w(t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Theta} \langle w \rangle &= -\langle w^3 \rangle, \\ \frac{d}{d\Theta} \langle w, w \rangle &= -2 \langle w, w^3 \rangle + 2 \langle w, v \rangle, \\ \frac{d}{d\Theta} \langle w, w, w \rangle &= -3 \langle w, w, w^3 \rangle + 3 \langle w, w, v \rangle \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{d\Theta} \langle w^{[s]} \rangle &= -s \langle w^{[s-1]}, w^3 \rangle + s \langle w^{[s-1]}, v \rangle. \end{aligned} \quad (16.5.7)$$

В эти уравнения индекс шума не входит. Это значит, что он может оказывать влияние на κ_s^w только через посредство совместных кумулянтов, уравнения для которых таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \langle w, v \rangle &= -\varepsilon \langle w, v \rangle - \langle v, w^3 \rangle + \varepsilon, \\ \frac{d}{d\theta} \langle w, w, v \rangle &= -\varepsilon \langle w, w, v \rangle - 2 \langle w, v, w^3 \rangle + \\ &+ 2 \langle w, v, v \rangle, \\ \frac{d}{d\theta} \langle w, v, v \rangle &= -2\varepsilon \langle w, v, v \rangle - \langle v, v, w^3 \rangle \\ &\dots \dots \dots (16.5.8) \end{aligned}$$

Вследствие симметричности входного шума и самой системы вероятностное распределение выходной переменной также будет симметричным. Это значит, что $\kappa_{2n+1}^w = 0$, и в (16.5.7) нас будут интересовать только четные значения s .

3. Пусть индекс шума μ принимает малые значения, соответствующие $\varepsilon \gg 1$. В этом случае установившиеся значения совместных кумулянтов согласно (16.5.8) будут определяться уравнениями

$$\langle w, v \rangle = 1, \quad \langle w, w, v \rangle = 0, \quad \langle w, v, v \rangle = 0, \dots$$

Соответственно все совместные кумулянты $\kappa_{p,q}^{w,v}$, кроме ковариации, равны нулю. Это, в свою очередь, приводит нас к

$$\begin{aligned} \langle w^3 \rangle &= 0, \quad \langle w, w^3 \rangle = 1, \\ \langle w, w, w^3 \rangle &= 0, \dots, \quad \langle w^{[s-1]}, w^3 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (16.5.9)$$

Раскрывая эти кумулянтные скобки, получим уравнения для κ_s^w , в которые индекс шума не входит и которые дадут нам лишь численные значения κ_s^w . Это значит, что для малого индекса шума установившиеся значения кумулянтов равны

$$\kappa_{2s+1}^x = 0, \quad \kappa_{2s}^x = \left(\frac{\pi S_u^0}{a} \right)^{s/2} \kappa_{2s}^w, \quad (16.5.10)$$

где последовательность κ_{2s}^w представляет собой последовательность чисел, являющихся корнями бесконечной системы уравнений (16.5.9). Сравнивая (16.5.10) с (15.4.14), мы видим полное совпадение. Это значит, что условие $\mu \ll 1$ является точным условием широкополосности воздействия, а не только при ограничении рассмотрения гауссовым приближением.

4. Если индекс шума велик, так что $\varepsilon \ll 1$, то производя аналогичные, хотя и более громоздкие выкладки, можно прийти к следующим значениям кумулянтов

$$\kappa_{2s+1}^x = 0, \quad \kappa_{2s}^x = \sqrt[3]{D_u^s / a^{2s}} \kappa_{2s}^w. \quad (16.5.11)$$

Набор кумулянтов κ_{2s}^Φ представляет собой последовательность чисел, являющихся корнями уравнений

$$\begin{aligned} \langle \varphi^3 \rangle &= 0, & \langle \psi, \varphi^3 \rangle &= 1, \\ \langle \varphi, \varphi^3 \rangle &= \langle \varphi, \psi \rangle, & \langle \psi, \psi, \varphi^3 \rangle &= 0, \\ \langle \varphi, \varphi, \varphi^3 \rangle &= \langle \varphi, \varphi, \psi \rangle & \langle \psi, \psi, \psi, \varphi^3 \rangle &= 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \varphi, \psi, \psi \rangle &= \langle \varphi, \psi, \varphi^3 \rangle, \\ \langle \varphi, \varphi, \psi, \psi \rangle &= \langle \varphi, \varphi, \psi, \varphi^3 \rangle \end{aligned} \quad (16.5.12)$$

Переменные φ, ψ введены соотношениями

$$\omega = \sqrt[6]{\varepsilon} \varphi, \quad v = \sqrt[6]{\varepsilon^3} \psi.$$

Нетрудно убедиться в том, что значения кумулянтов (16.5.12) соответствуют квазистатистическому приближению. В самом деле, если случайный процесс $x(t)$ настолько медленен, что производной по времени в первом уравнении (16.5.1) можно пренебречь, то из $ax^3 = u$ сразу же следуют (после приведения к безразмерным переменным) уравнения (16.5.12). Таким образом, во-первых, *условие большого значения индекса шума является точным условием квазистатики*, а не только в гауссовом приближении; во-вторых, при квазистатистическом воздействии шума основной его характеристикой становится дисперсия, которая вместе с коэффициентом нелинейности системы полностью определяет все кумулянты негауссова случайного процесса $x(t)$.

Тем самым, полоса нелинейной системы, введенная в § 16.3 как $\Pi \equiv -\langle f'_x[x, u] \rangle$ и равная для данной конкретной системы $\Pi = 3a \langle x^2 \rangle$, играет свою основную роль в сравнении с полосой воздействующего шума *при любой степени негауссовости* исследуемого случайного процесса и при учете всех его кумулянтов, хотя вначале она была введена в гауссовом приближении.

16.6. Учет эксцессного приближения

1. Рассмотрим теперь подробнее эксцессное приближение для совокупности $\{x, u\}$, предположив для простоты, что из всех совместных кумулянтов отличен от нуля только $\langle x, u \rangle$. Нам необходимо отыскать кумулянты $\langle x, x \rangle, \langle x, u \rangle, \langle x, x, x, x \rangle$. Будем исходить из системы уравнений (16.5.3). Для этих кумулянтов получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x, x \rangle &= -2a \langle x, x^3 \rangle + 2 \langle x, u \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle x, u \rangle &= -a \langle u, x^3 \rangle - \gamma \langle x, u \rangle + \langle u, u \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle x, x, x, x \rangle &= -4a \langle x, x, x, x^3 \rangle. \end{aligned}$$

Уравнения для установившихся значений кумулянтов в эксцессном приближении принимают вид

$$a [\kappa_4^x + 3D_x^2] = \langle x, u \rangle, \\ [3aD_x + \gamma] \langle x, u \rangle = D_u, \quad 2\kappa_4^x + D_x^2 = 0.$$

Выбирая в качестве основного переменного опять же полосу системы $\Pi = 3aD_x$, имеем

$$D_x = \frac{\Pi}{3a}, \quad \langle x, u \rangle = \frac{5}{18a} \Pi^2, \quad \kappa_4^x = -\frac{1}{18a^2} \Pi^2. \quad (16.6.1)$$

Полоса при этом определяется уравнением

$$\Pi^3 + \gamma \Pi^2 = \frac{6}{5} \gamma \Delta^2. \quad (16.6.2)$$

Сравнивая эти выражения с (16.4.4), (16.4.5), видим, что учет эксцессного приближения привел к изменению значения полосы, к изменению дисперсии и ковариации $\langle x, u \rangle$, а также к появлению отличного от нуля четвертого кумулянта.

Решение уравнения (16.6.2) для полосы может быть выражено с помощью функции $Q(\mu)$, введенной в § 16.4: $\Pi = \gamma Q(\sqrt{6/5} \mu)$.

Таким образом, получаем следующие значения кумулянтов негауссова выходного случайного процесса $x(t)$ в эксцессном приближении:

$$D_x = \frac{\gamma}{3a} Q\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mu\right), \quad \langle x, u \rangle = \frac{5\gamma^2}{18a} Q^2\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mu\right), \\ \kappa_4^x = -\frac{\gamma^2}{18a^2} Q^2\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mu\right).$$

Как и ранее, все определяется значением индекса шума.

2. При малом индексе шума, когда $Q(\mu) = \mu$,

$$D_x = \sqrt{6\pi S_u^0/5} \cdot 3a, \quad \langle x, u \rangle = \pi S_u^0, \\ \Pi = \sqrt{6/5} \Delta, \quad \kappa_4^x = -\pi S_u^0/5a.$$

Дисперсия по сравнению с гауссовым приближением увеличилась в $\sqrt{6/5} = 1,09$ раза, в то время как ковариация $\langle x, u \rangle$ осталась без изменений. Условие широкополосности приняло вид

$$\sqrt{\frac{6}{5}} 3\pi a S_u^0 \ll \gamma.$$

Важным обстоятельством оказалось увеличение полосы. Это связано с тем, что хотя связь полосы с дисперсией и осталась без изменений, несколько изменилось само значение дисперсии. И это связано именно с учетом эксцессного приближения. Если бы мы захотели учесть следующее приближение — приближение шестого порядка, то мы бы получили еще одну поправку на значение поло-

сы. Тем не менее, условие широкополосности воздействия выглядело бы по-прежнему как $\Pi \ll \gamma$.

При большом индексе воздействующего шума, когда $Q(\mu) = \sqrt[3]{\mu^2}$,

$$\Pi = \sqrt[3]{18aD_u/5}, \quad D_x = \sqrt[3]{2D_u/15a^2},$$

$$\langle x, u \rangle = \sqrt[3]{5D_u^2/18a}, \quad \kappa_4^x = -\sqrt{D_u^2/18 \cdot 25a^4}.$$

Здесь также произошли небольшие численные изменения полосы, дисперсии и ковариации по сравнению с гауссовым приближением, а кроме того, появился отличный от нуля четвертый кумулянт, значение которого подтверждается общей формулой (16.5.11).

Условие квазистатистичности в эксцессном приближении имеет вид

$$\sqrt[3]{6\gamma\Delta^2/5} \ll \gamma.$$

Таким образом, качественные зависимости полосы, дисперсии и ковариации от индекса шума остались такими же, как и для гауссова приближения, и вся разница между эксцессным и гауссовым приближением носит лишь количественный характер. Этот пример еще раз подтверждает, что гауссово приближение дает нам в руки важную и качественно верную информацию о статистических характеристиках изучаемого случайного процесса.

3. Рассмотрим теперь структуру спектра выходного случайного процесса $x(t)$ в эксцессном приближении. Чтобы найти $S_x(\omega)$, надо знать $B_x[\tau]$. Для отыскания ковариационной функции следует решить систему уравнений для кумулянтных функций марковской совокупности $\{x, u\}$. Как и ранее, в этом параграфе при учете эксцессного приближения мы будем полагать отличными от тождественного нуля только три кумулянтные функции

$$B_x[\tau] = \kappa_2^x(0, \tau), \quad B_{xu}[\tau] = \kappa_{1,1}^{x,u}(0, \tau), \quad \kappa_4^x(0, \tau, \tau, \tau) \equiv \equiv E_x[\tau].$$

Уравнения для этих кумулянтных функций записываем на основании (10.11.17) — (10.11.19), учитывая, что

$$K_x = -ax^3 + u, \quad K_u = -\gamma u, \quad K_{xx} = K_{xu} = 0, \quad K_{uu} = \mathcal{D}.$$

В результате, используя свойства кумулянтных скобок, получим

$$\frac{d}{d\tau} B_x[\tau] = -3a \langle x^2 \rangle B_x[\tau] + B_{xu}[\tau] - aE_x[\tau],$$

$$\frac{d}{d\tau} B_{xu}[\tau] = -\gamma B_{xu}[\tau],$$

$$\frac{d}{d\tau} E_x[\tau] = -9a \langle x, x, x^2 \rangle B_x[\tau] - [9a \langle x^2 \rangle +$$

$$+ 18a \langle x, x \rangle] E_x[\tau].$$

Раскрывая кумулянтные скобки и принимая во внимание значения установившихся кумулянтов (16.6.1), запишем уравнения для

искомых кумулянтных функций в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} B_x[\tau] &= -\Pi B_x[\tau] + B_{xu}[\tau] - aE_x[\tau], \\ \frac{d}{d\tau} B_{xu}[\tau] &= -\gamma B_{xu}[\tau], \\ \frac{d}{d\tau} aE_x[\tau] &= -\frac{3}{2} \Pi^2 B_x[\tau] - 9\Pi aE_x[\tau].\end{aligned}\quad (16.6.3)$$

Предполагая, что все кумулянтные функции пропорциональны $e^{-p\tau}$ (мы всюду рассматриваем $\tau \geq 0$), для p получаем характеристическое уравнение третьей степени

$$(p - \gamma) \left(p^2 - 10\Pi p + \frac{15}{2} \Pi^2 \right) = 0,$$

корни которого равны

$$p_1 = \gamma, \quad p_2 = \left(5 - \sqrt{\frac{35}{2}} \right) \Pi \equiv n\Pi, \quad p_3 = \left(5 + \sqrt{\frac{35}{2}} \right) \Pi \times \\ \times \Pi \equiv m\Pi,$$

где $n \approx 0,82$, $m \approx 9,18$.

Следовательно (учитывая также независимость второго уравнения (16.6.3) от остальных), получаем следующий вид для кумулянтных функций:

$$\begin{aligned}B_x[\tau] &= D_x [Ae^{-n\Pi\tau} + Be^{-m\Pi\tau} + Ce^{-\gamma\tau}], \\ B_{xu}[\tau] &= \langle x, u \rangle e^{-\gamma\tau}, \\ aE_x[\tau] &= \alpha x_4^x [A_1 e^{-n\Pi\tau} + B_1 e^{-m\Pi\tau} + C_1 e^{-\gamma\tau}].\end{aligned}\quad (16.6.4)$$

Входящие сюда безразмерные коэффициенты A, B, C, A_1, B_1, C_1 , когорые, как можно показать, зависят только от $\delta = \Pi/\gamma$, без особого труда могут быть определены из начальных условий, аналогичных (10.8.16). Мы не будем приводить их здесь в силу громоздкости выражений, а лишь проанализируем полученную ситуацию, отметив прежде всего, что в соответствии с первой формулой (16.6.4) спектр выходной переменной имеет вид

$$S_x(\omega) = \frac{\Pi}{3a\Pi} \left[\frac{A(\delta) n\Pi}{n^2 \Pi^2 + \omega^2} + \frac{B(\delta) m\Pi}{m^2 \Pi^2 + \omega^2} + \frac{C(\delta) \gamma}{\gamma^2 + \omega^2} \right].$$

При изменении δ соотношение между тремя компонентами ковариационной функции и спектра может сильно меняться.

4. К чему привел учет эксцессного приближения по сравнению с гауссовым приближением в отношении корреляционной функции и спектра исследуемого негауссова случайного процесса $x(t)$?

Прежде всего, если ранее было два значения времени корреляции $\tau_{h,1} = \Pi^{-1}$, $\tau_{h,2} = \gamma^{-1}$, то теперь случайный процесс $x(t)$ обладает тремя временами корреляции, последнее из которых, представляю-

щее время корреляции воздействующего шума, осталось, естественно, без изменений, в то время как первое значение «расщепилось» на два, отличающихся между собой на порядок:

$$\tau_{h,1} = \frac{1}{n\Pi} = \frac{1,22}{\Pi}, \quad \tau_{h,2} = \frac{1}{m\Pi} = \frac{0,109}{\Pi}, \quad \tau_{h,3} = \frac{1}{\gamma}.$$

Максимальное время корреляции при этом изменилось не столь существенно. Если интересоваться полным временем корреляции, то оно определяется взаимоотношением всех трех компонент ковариационной функции:

$$\tau_h = \frac{1}{D_x} \int_0^{\infty} B_x[\tau] d\tau = \frac{1}{\Pi(\delta)} \left[\frac{A(\delta)}{n} + \frac{B(\delta)}{m} + C(\delta) \delta \right].$$

Столь же значительным образом зависит от взаимоотношения функций $A(\delta)$, $B(\delta)$, $C(\delta)$, а следовательно, от значения δ и вид спектра $S_x(\omega)$, который имеет теперь три слагаемых резонансной формы с шириной соответственно $0,82\Pi(\delta)$, $9,18\Pi(\delta)$, γ . Кроме изменения ковариационной функции и спектра, учет эксцессного приближения привел к отличной от нуля эксцессной функции $E_x[\tau]$ и, следовательно, к появлению времени статистической зависимости третьего порядка, которое можно определить как

$$\Theta_3 \equiv \frac{1}{\kappa_4} \int_0^{\infty} E_x[\tau] d\tau = \frac{1}{\Pi(\delta)} \left[\frac{A_1(\delta)}{n} + \frac{B_1(\delta)}{m} + C_1(\delta) \delta \right]$$

и величина которого также зависит от значения относительной полосы системы δ .

В случае малого индекса шума, когда $\delta = \sqrt{6/5}\Delta/\gamma \ll 1$, $\Pi = \sqrt{6/5}\Delta$, получим

$$A(\delta) = \frac{m-5/6}{m-n} \approx 1, \quad B(\delta) = \frac{5/6-n}{m-n} \approx 0,002,$$

$$A_1(\delta) = \frac{m}{m-n} \approx 1,1, \quad B_1(\delta) = \frac{-n}{m-n} \approx -0,1,$$

$$C(\delta) = -\frac{5}{6} \delta, \quad C_1(\delta) = nm\delta^2 = \frac{15}{2} \delta^2.$$

Эти значения приводят к тому, что в кумулянтных функциях негауссова процесса $x(t)$ основную роль играет лишь первое слагаемое, и мы приближенно имеем ($\tau \geq 0$)

$$B_x[\tau] \simeq D_x e^{-n\Pi\tau},$$

$$\kappa_4^x(0, \tau, \tau, \tau) = \kappa_4^x[1, 1e^{-n\Pi\tau} - 0,1e^{-m\Pi\tau}].$$

Времена корреляции и статистической зависимости третьего порядка соответственно равны

$$\tau_k = \frac{1}{n\Pi} \simeq \frac{1,1}{\Delta}, \quad \Theta_3 = \frac{1,1}{n\Pi} - \frac{0,1}{m\Pi} \simeq \frac{1,22}{\Delta},$$

а спектр имеет вид

$$S_x(\omega) = \frac{1}{3a\pi n} \frac{n^2 \Pi^2}{n^2 \Pi^2 + \omega^2}.$$

При малом индексе воздействующего шума учет эксцессного приближения привел к некоторому увеличению времени корреляции (и к уменьшению полосы спектра) и появлению времени статистической зависимости третьего порядка, которое близко к значению времени корреляции.

Если индекс воздействующего шума принимает большие значения

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{6\Delta^2}{5\gamma^2}} \gg 1, \quad \Pi = \sqrt[3]{\frac{18aD_u}{5}}, \quad \text{то}$$

$$A(\delta) = -\frac{m-5/6}{(m-n)n\delta} \approx \frac{1,2}{\delta}, \quad B(\delta) = \frac{n-5/6}{(m-n)m\delta} \approx \frac{0,11}{\delta},$$

$$C(\delta) = 1,$$

$$A_1(\delta) = \frac{-m}{(m-n)n\delta} \approx -\frac{1,3}{\delta}, \quad B_1(\delta) = \frac{n}{(m-n)m\delta} \approx \frac{0,01}{\delta},$$

$$C_1(\delta) = 1.$$

В этом случае кумулянтные функции и спектр определяются третьими слагаемыми, и мы приближенно имеем ($\tau \geq 0$)

$$B_x[\tau] = D_x e^{-\gamma\tau},$$

$$\kappa_4^x(0, \tau, \tau, \tau) = \kappa_4 e^{-\gamma\tau},$$

$$S_x(\omega) = \frac{\delta}{3a\pi} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \omega^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{2D_u}{15a^2}} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}.$$

Таким образом, при большом индексе шума входного процесса учет эксцессного приближения, не изменив вида ковариационной функции и спектра, изменил лишь значение дисперсии (и, следовательно, полосы системы). При этом существует отличная от нуля эксцессная функция, а время статистической зависимости третьего порядка, совпадая с временем корреляции, полностью определяется временем корреляции воздействующего шума, как это, очевидно, и должно быть при квазистатическом воздействии.

В случае произвольного значения δ спектр $S_x(\omega)$ имеет, конечно, более сложную структуру, и картины эволюции спектра, соответствующие рис. 16.2 и 16.3, при учете эксцессного приближения примут еще более сложный и замысловатый вид.

16.7. Инерционное детектирование шума

1. Выше, в § 14.14, мы анализировали безынерционное детектирование случайного процесса. Выясним теперь, как сказывается инерционность системы детектирования на статистических характеристиках выходного процесса.

Рассмотрим простейшую схему инерционного детектора (рис. 15.1). Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента дается зависимостью $i = I(v)$, а $RC = a^{-1}$ характеризует постоянную времени усредняющего звена. Введя в рассмотрение функцию $F(v) = RI(v)$, получим следующее дифференциальное уравнение, связывающее выходное исследуемое напряжение $x(t)$ с входным заданным случайным процессом:

$$dx/dt = -ax + aF(u - x). \quad (16.7.1)$$

Будем полагать $u(t)$ гауссовым стационарным низкочастотным шумом — марковским процессом, удовлетворяющим уравнению

$$du/dt = -\gamma u + \xi(t), \quad (16.7.2)$$

где $\xi(t)$ — гауссов стационарный белый шум с интенсивностью $\mathcal{D}$. Таким образом, нам заданы следующие статистические характеристики $u(t)$:

$$\langle u \rangle = 0, \quad D_u = \mathcal{D}/2\gamma, \quad B_u[\tau] = D_u e^{-\gamma|\tau|}.$$

Выходной процесс $x(t)$ вследствие нелинейности функции $F(v)$ является негауссовым и немарковским процессом. Вместе с этим, совокупность $\{x, u\}$ является непрерывной марковской совокупностью, обладающей кинетическими коэффициентами

$$\begin{aligned} K_x &= -ax + aF(u - x), & K_u &= -\gamma u, \\ K_{xx} &= K_{xu} = 0, & K_{uu} &= \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Исследуем некоторые статистические свойства выходной переменной $x(t)$, ограничившись гауссовым приближением и конкретной функцией

$$F(v) = A(e^{bv} - 1). \quad (16.7.3)$$

2. Если воспользоваться формулами (16.2.2), то мы получим следующие уравнения, определяющие установившиеся значения кумулянтов $\langle x \rangle$, $\langle x, u \rangle$, $\langle x, x \rangle = D_x$:

$$\langle x \rangle = \langle F \rangle_r,$$

$$\langle x, u \rangle = \frac{a \langle F' \rangle_r}{\gamma + a(1 + \langle F' \rangle_r)} D_u,$$

$$D_x = \langle F' \rangle_r (1 + \langle F' \rangle_r)^{-1} \langle x, u \rangle.$$

Полоса системы равна

$$\Pi = a(1 + \langle F' \rangle_r).$$

Здесь под $\langle F' \rangle_r$ понимается производная по аргументу функции, усредненная в предположении его гауссовости.

Исходя из (16.7.3), где $v = u - x$, и учитывая, что $\langle u \rangle = 0$, нетрудно найти

$$\begin{aligned}\langle F \rangle_r &= A \left[\exp \left\{ -b \langle x \rangle + \frac{b^2}{2} (D_u - 2 \langle x, u \rangle + D_x) \right\} - 1 \right], \\ \langle F' \rangle_r &= bA \exp \left\{ -b \langle x \rangle + \frac{b^2}{2} (D_u - 2 \langle x, u \rangle + D_x) \right\}.\end{aligned}$$

Введем безразмерный параметр, описывающий среднее значение выходной переменной $b \langle x \rangle + bA \equiv \varepsilon$. Так как $b \langle F \rangle_r = \langle F' \rangle_r - bA$, то [ср. с (14.14.4)] $\langle F' \rangle_r = \varepsilon$.

Следовательно, ковариация и дисперсия равны

$$\begin{aligned}\langle x, u \rangle &= \frac{a\varepsilon}{\gamma + a(1 + \varepsilon)} D_u, \\ D_x &= \frac{a\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)(\gamma + a + a\varepsilon)} D_u.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в выражение для $\langle F' \rangle_r$, мы найдем, что ε удовлетворяет трансцендентному уравнению [ср. с (14.14.6)]

$$\varepsilon = \alpha \exp \left[\alpha - \varepsilon + s \frac{a + \gamma(1 + \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)(\gamma + a + a\varepsilon)} \right]. \quad (16.7.4)$$

Степень нелинейности детектора характеризуется в этом уравнении безразмерным параметром $\alpha = bA$, мощность воздействующего шума — величиной $s = b^2 D_u / 2$. Кроме этого, в уравнение входит отношение полосы системы к полосе воздействующего шума:

$$\delta = \Pi \gamma^{-1} = a \gamma^{-1} (1 + \varepsilon). \quad (16.7.5)$$

Подставляя (16.7.5) в (16.7.4), можно было бы получить уравнение, определяющее полосу системы. Однако удобнее сначала находить ε из (16.7.4), а затем уже полосу системы и кумулянты.

Можно показать, что уравнение (16.7.4) имеет единственный положительный корень, зависящий от s , α и a/γ .

3. Ковариационная функция выхода детектора и его спектр согласно (16.2.4), (16.2.5) в гауссовом приближении таковы:

$$\begin{aligned}B_x[\tau] &= \frac{D_x}{\gamma - a(1 + \varepsilon)} [\gamma e^{-a(1 + \varepsilon)|\tau|} - a(1 + \varepsilon)e^{-\gamma|\tau|}], \\ S_x(\omega) &= \langle x \rangle^2 \delta(\omega) + G_x^0 \frac{\Pi^2 \gamma^2}{(\Pi^2 + \omega^2)(\gamma^2 + \omega^2)},\end{aligned} \quad (16.7.6)$$

где

$$G_x^0 = \frac{D_x}{\pi} \frac{\Pi + \gamma}{\Pi \gamma} = \frac{\varepsilon^2 D_u}{\pi \gamma (1 + \varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)^2} S_u^0. \quad (16.7.7)$$

Энергетическая полоса спектра шума на выходе детектора равна

$$\Omega_x = \frac{\pi}{2} \frac{\gamma a (1 + \varepsilon)}{\gamma + a (1 + \varepsilon)}.$$

Таким образом, в гауссовом приближении все статистические характеристики выходного процесса определяются параметром ε , соотношением a и γ и мощностью входного шума.

4. Приступим теперь к исследованию и обсуждению полученных результатов. Начнем рассмотрение со случая широкополосного входного шума, когда его полоса много больше полосы системы: $\gamma \gg a (1 + \varepsilon)$. Будем также полагать, что при постоянном значении γ дисперсия входного шума $D_u = \pi \gamma S_u^0$ изменяется за счет изменения высоты спектра входного шума S_u^0 .

При большом значении γ уравнение (16.7.4) принимает вид

$$\varepsilon e^\varepsilon = \alpha e^{\alpha + s}.$$

Корень этого уравнения как функция s для $\alpha = 0,1$ изображен на рис. 16.4. При $s \ll \alpha$ $\varepsilon = \alpha$, при $s \gg \alpha$ $\varepsilon = s$. Полученная функция $\varepsilon = \varepsilon(s)$ позволяет определить зависимость постоянной составляющей выходной переменной от дисперсии входного шума, так как $b\langle x \rangle = \varepsilon - \alpha$. Отсюда следует, что постоянная составляющая сначала при малых s возрастает с ростом s медленно, а затем скорость роста увеличивается. Такая картина связана с тем, что, с одной стороны, при малой мощности воздействующего шума нелинейность детектора, отвечающая за постоянную составляющую, сказывается еще сравнительно мало и начинает играть заметную роль лишь при $s \geq 1$. Последующее уменьшение скорости роста $\langle x \rangle$ связано с тем, что появившаяся постоянная составляющая из-за отрицательной обратной связи непрерывно сдвигает рабочую точку нелинейного элемента в область меньшей крутизны так, что при больших значениях мощности входного шума постоянная составляющая на выходе становится пропорциональной этой мощности.

В рассмотренном случае широкополосного воздействия $\gamma \gg \Pi$ спектр флуктуаций $x(t)$ имеет резонансную форму с шириной и высотой

$$\Pi = a (1 + \varepsilon), \quad G_x^0 = \varepsilon^2 (1 + \varepsilon)^{-2} S_u^0.$$

При малой мощности шума, когда $s \ll \alpha$,

$$\Pi = a (1 + \alpha), \quad G_x^0 = \alpha^2 (1 + \alpha)^{-2} S_u^0.$$

На рис. 16.5 изображена эволюция выходного спектра для $\alpha = 0,1$. Сначала при малых мощностях входного шума полоса выхода неизменна и равна $\Pi = a$, в то время как G_x^0 быстро растет. Затем при дальнейшем возрастании s полоса начинает расширяться $\sim as$, оставаясь, однако, много меньше γ , а отношение G_x^0/S_u^0 стремится к единице. Тем самым, при малых мощностях входного шума мы имеем режим фильтрации, режим, близкий к линейному, в то время как при больших значениях s наблюдается режим расширения спектра — существенно нелинейный режим.

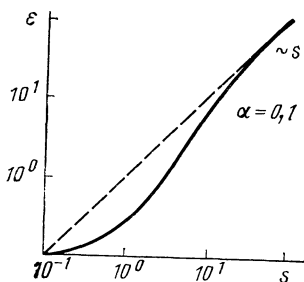


Рис. 16.4.

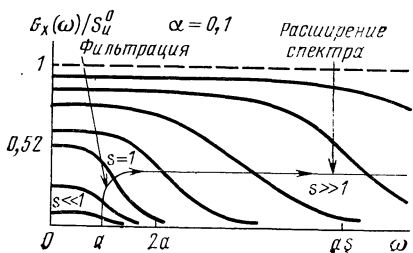


Рис. 16.5.

5. При дальнейшем росте мощности, когда полоса системы сильно возрастает ($\sim a\epsilon$), условие широкополосности нарушается, и при росте s мы приходим к режиму квазистатичности, соответствующему $\gamma \ll a(1 + \epsilon)$. В этом режиме ϵ определяется уравнением

$$\epsilon e^{\epsilon} = \alpha \exp [\alpha + s/(1 + \epsilon)^2],$$

которое полностью совпадает с (14.14.6). Это значит, что условие $\gamma \ll a(1 + \epsilon) = \Pi$ является не чем иным, как *условием безынерционности* детектирования.

В режиме квазистатичности, когда мы приходим к случаю безынерционного детектора, рассмотренного в § 14.14, зависимость ϵ от s изображена на графиках рис. 14.14. Сравнивая рис. 14.14 с рис. 16.4, видим, что в случае узкополосного входного шума постоянная составляющая на выходе растет существенно медленнее, нежели при широкополосном входе. Причиной этому является то, что при той же мощности входного шума высокочастотный шум попадает на детектор и, детектируясь, дает вклад в $\langle x \rangle$ большей долей, чем низкочастотный, из-за того, что RC -цепочка является для него коротким замыканием.

Для низкочастотного шума согласно (16.7.6) и (16.7.7) получим, учитывая, что основная мощность флуктуаций лежит в полосе, много меньшей $\gamma(1 + \epsilon)$,

$$G_x(\omega) = \frac{\epsilon^2}{(1 + \epsilon)^2} S_u^0 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \omega^2}.$$

Эволюция этого спектра [ср. с (14.14.7)] происходит только «по высоте» (рис. 16.6), которая возрастает при увеличении мощности входного шума в $1/\alpha^2$ раз.

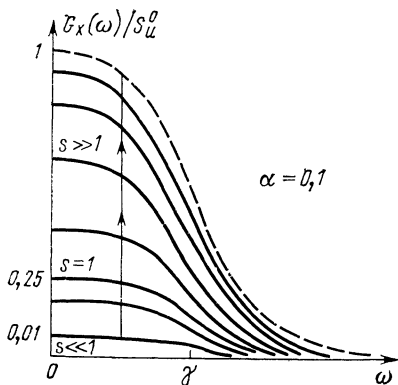


Рис. 16.6.

6. В заключение параграфа сделаем два замечания. Во-первых, отметим, что задача инерционного детектирования шума неоднократно рассматривалась в литературе (см., например, [5]) и уравнение (16.7.1) анализировалось различными методами в зависимости от соотношений времени корреляции воздействующего шума и постоянной времени системы. Вместе с этим часто постоянная времени системы определялась неверно, в качестве нее бралась постоянная времени RC -цепочки $\tau = a^{-1}$, в то время как необходимо рассматривать величину, обратную полосе системы

$$\tau_c = \frac{1}{a[1 + \langle F' \rangle_r]} = \frac{1}{a[1 + \varepsilon]},$$

существенно зависящую от характеристик воздействующего шума и, в частности, от его мощности.

При малой интенсивности воздействующего шума, когда ε мало, $\tau_c \approx 1/a$ и ошибка невелика. Однако при большом значении s , когда ε может принимать большие значения, ошибка может стать весьма существенной.

Во-вторых, обратим внимание на то, что в случае широкополосного входного процесса $u(t)$ появляется искушение вместо двух уравнений (16.7.1), (16.7.2) рассматривать одно

$$dx/dt = -ax + aF(\xi - x) \quad (16.7.8)$$

с дельта-коррелированным воздействием $\xi(t)$ и решать его, полагая процесс $x(t)$ марковским. Однако подобный подход не удастся реализовать. Это связано с тем, что для (16.7.8) мы не получим конечных значений некоторых кинетических коэффициентов. Последнее обусловлено бесконечным значением дисперсии дельта-коррелированного воздействия $\xi(t)$.

Это может означать только одно — в полученных в этом параграфе выражениях мы не можем устремлять γ к бесконечности, сохраняя значение S_u^0 постоянным. Так оно и есть на самом деле, ибо $D_u = \pi\gamma S_u^0$, возрастая, приводит к бесконечно большим значениям ε или, что то же самое, к бесконечно большому значению постоянной составляющей на выходе детектора. С другой стороны, неограниченный рост ε дает бесконечно большое значение полосы системы $\Pi = a(1 + \varepsilon) \approx as = D_u ab^2/2$, что, в свою очередь, ведет к нарушению условия широкополосности воздействующего шума.

Другими словами, при детектировании широкополосного шума он не может «безнаказанно» заменяться дельта-коррелированным процессом, и именно по этой причине мы и должны задаваться не одним уравнением (16.7.8), а двумя: (16.7.1), (16.7.2) и специально проверять, действительно ли при заданных параметрах детектируемый шум может считаться широкополосным.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I. Некоторые статистические средние

1. Средние от дельта-функций и их производных:

$$\langle \delta(\xi - x) \rangle_{\xi} = W_{\xi}(x), \quad (I.1)$$

$$\langle \delta(\xi - x) \delta(\eta - y) \rangle_{\xi, \eta} = W_{\xi \eta}(x, y), \quad (I.2)$$

$$\langle \delta^{(s)}(\xi - x) \rangle_{\xi} = (-1)^s W_{\xi}^{(s)}(x). \quad (I.3)$$

Если совокупность $\{\xi, \eta\}$ гауссова и $\langle \xi \rangle = \langle \eta \rangle = 0$, то справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(2s+1)}(\xi) \rangle &= 0, \quad \langle \delta(\xi) \rangle = (2\pi D)^{-1/2}, \\ \langle \delta''(\xi) \rangle &= -\frac{1}{D} (2\pi D)^{-1/2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \langle \delta^{(2s)}(\xi) \rangle &= 2^s \frac{d^s}{dD^s} (2\pi D)^{-1/2} = \frac{(-1)^s (2s-1)!!}{D^s} (2\pi D)^{-1/2}; \quad (I.4) \end{aligned}$$

$$\langle \delta(\xi) \delta(\eta) \rangle = \frac{1}{2\pi} [D_{\xi} D_{\eta} - B_{\xi \eta}^2]^{-1/2}. \quad (I.5)$$

2. Средние от произвольных функций:

$$\begin{aligned} \langle f(\xi) \rangle - f(\langle \xi \rangle) + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{\mu_s}{s!} f^{(s)}(\langle \xi \rangle) &= f(\langle \xi \rangle) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{d\xi^2} \kappa_2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{d^3 f}{d\xi^3} \kappa_3 + \frac{1}{4!} \frac{d^4 f}{d\xi^4} (\kappa_4 + 3\kappa_2^2) + \frac{1}{5!} \frac{d^5 f}{d\xi^5} (\kappa_5 + 10\kappa_2 \kappa_3) + \dots, \end{aligned} \quad (I.6)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\xi, \eta) \rangle &= \Psi(\langle \xi \rangle, \langle \eta \rangle) + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \kappa_{20} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} \kappa_{11} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2 \kappa_{02}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{3!} \left\{ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi^3} \kappa_{30} + 3 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi^2 \partial \eta} \kappa_{21} + 3 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi \partial \eta^2} \kappa_{12} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \eta^3} \kappa_{03} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4!} \left\{ \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \xi^4} [\kappa_{40} + 3\kappa_{20}^2] + 4 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \xi^3 \partial \eta} [\kappa_{31} + 3\kappa_{11} \kappa_{20}] + 6 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} [\kappa_{22} + \right. \\ &\left. + 2\kappa_{11}^2 + \kappa_{20} \kappa_{02}] + 4 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \xi \partial \eta^3} [\kappa_{13} + 3\kappa_{11} \kappa_{02}] + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \eta^4} [\kappa_{04} + 3\kappa_{02}^2] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (I.7)$$

В этих формулах производные берутся в точках $\xi = \langle \xi \rangle$, $\eta = \langle \eta \rangle$. Если в (I.6) положить $f(\xi) = \delta(\xi - x)$, то, учитывая (I.1), придем к

$$W_{\xi}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\mu_s}{s!} \delta^{(s)}(x - m). \quad (\text{I.8})$$

Приложение II. Формулы размыкания моментных и кулюмлянтных скобок

1. Совокупность случайных переменных x, y, z, u имеет произвольное вероятностное распределение

$$\begin{aligned} \langle x, x^2 \rangle &= \kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_2, \\ \langle x, x, x^2 \rangle &= \kappa_4 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2^2, \\ \langle x, x, x, x^2 \rangle &= \kappa_5 + 2\kappa_1\kappa_4 + 6\kappa_2\kappa_3, \\ \langle x, x, x, x, x^2 \rangle &= \kappa_6 + 2\kappa_1\kappa_5 + 8\kappa_2\kappa_4 + 6\kappa_3^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\langle x^{[s]}, x^2 \rangle = \kappa_{s+2} + \sum_{\lambda=0}^s C_s^{\lambda} \kappa_{\lambda+1} \kappa_{s-\lambda+1}; \quad (\text{II.1})$$

$$\begin{aligned} \langle x^2, y \rangle &= \langle x, x, y \rangle + 2 \langle x \rangle \langle x, y \rangle, \\ \langle x^2, y, y \rangle &= \langle x, x, y, y \rangle + 2 \langle x \rangle \langle x, y, y \rangle + 2 \langle x \rangle \langle x, y \rangle^2, \\ \langle x^2, y, y, y \rangle &= \langle x, x, y, y, y \rangle + 2 \langle x \rangle \langle x, y, y, y \rangle + \\ &+ 6 \langle x \rangle \langle x, y \rangle \langle x, y, y \rangle, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\langle x^2, y^{[s]} \rangle = \langle x, x, y^{[s]} \rangle + \sum_{\lambda=0}^s C_s^{\lambda} \langle x, y^{[\lambda]} \rangle \langle x, y^{[s-\lambda]} \rangle; \quad (\text{II.2})$$

$$\begin{aligned} \langle x, x^3 \rangle &= \kappa_4 + 3\kappa_1\kappa_3 + 3\kappa_2^2 + 3\kappa_1^2\kappa_2, \\ \langle x, x, x^3 \rangle &= \kappa_5 + 3\kappa_1\kappa_4 + 9\kappa_2\kappa_3 + 3\kappa_1^2\kappa_3 + 6\kappa_1\kappa_2^2, \\ \langle x, x, x, x^3 \rangle &= \kappa_6 + 3\kappa_1\kappa_5 + 12\kappa_2\kappa_4 + 3\kappa_1^2\kappa_4 + 9\kappa_3^2 + \\ &+ 18\kappa_1\kappa_2\kappa_3 + 6\kappa_3^2; \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

$$\langle x^3, y \rangle = \langle x, x, x, y \rangle + 3 \langle x \rangle \langle x, x, y \rangle + 3 \langle x \rangle \langle x \rangle \langle x, y \rangle + 3 \langle x \rangle^2 \langle x, y \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle x^3, y, y \rangle &= \langle x, x, x, y, y \rangle + 3 \langle x \rangle \langle x, x, y, y \rangle + 3 \langle x \rangle \langle x \rangle \times \\ &\times \langle x, y, y \rangle + 6 \langle x \rangle \langle x, y \rangle \langle x, x, y \rangle + 3 \langle x \rangle^2 \langle x, y, y \rangle + \\ &+ 6 \langle x \rangle \langle x \rangle \langle x, y \rangle^2; \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

$$\langle x y^k \rangle = \langle x, y^{[k]} \rangle + \sum_{l=1}^k C_k^l \langle y^l \rangle \langle x, y^{[k-l]} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle xy, f(z) \rangle &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \left[\langle x, y, z^{[s]} \rangle + \right. \\ &+ \left. \sum_{\lambda=0}^s C_s^{\lambda} \langle x, z^{[\lambda]} \rangle \langle y, z^{[s-\lambda]} \rangle \right]; \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

$$\langle xyz f(w) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle f^{(n)} \rangle \left[\langle x, y, z, w^{[n]} \rangle + \sum_{k=0}^n C_n^k 3 \{ \langle x, w^{[k]} \rangle \times \right.$$

$$\times \langle y, z, w^{[n-k]} \rangle_s + \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} C_n^k C_{n-k}^l \langle x, w^{[k]} \rangle \langle y, w^{[l]} \rangle \times \\ \times \langle z, w^{[n-k-l]} \rangle \Big]; \quad (\text{II.6})$$

$$\langle y, xf(y) \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dy^s} (y, f(y)) \right\rangle \kappa_{1,s}^{x,y}; \quad (\text{II.7})$$

$$\langle y, y, xf(y) \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left\langle \frac{d^s}{dy^s} (y, y, f(y)) \right\rangle \kappa_{1,s}^{x,y}. \quad (\text{II.8})$$

Если $\langle x \rangle = 0$, то

$$\langle x, f(y), g(y) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^n C_n^k \langle f^{(n-k)}, g^{(k)} \rangle + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \langle f^{(n-k)} \rangle \langle g^{(k)} \rangle \right\} \langle x, y^{[n]} \rangle; \quad (\text{II.9})$$

$$\langle x, y, f(z, u) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l=0 \\ k+l \geq 0}}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \left\langle \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial u^l} f(z, u) \right\rangle \times \\ \times \left[\kappa_{1,1,k,l}^{x,y,z,u} + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0, k+l}}^k \sum_{j=0}^l C_k^i C_l^j \kappa_{1,i,j}^{x,z,u} \kappa_{1,k-i,l-j}^{y,z,u} \right]. \quad (\text{II.10})$$

В нижеследующих двух формулах индексы p, q принимают любые значения из 1, 2, ..., n :

$$\langle y_p, xf(y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \times \\ \times \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_n^{k_n}} (y_p, f(y_1, \dots, y_n)) \right\rangle \kappa_{1,k_1,k_2,\dots,k_n}^{x,y_1,y_2,\dots,y_n}, \quad (\text{II.11})$$

$$\langle y_p, y_q, xf(y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \times \\ \times \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_n^{k_n}} (y_p, y_q, f(y_1, \dots, y_n)) \right\rangle \kappa_{1,k_1,k_2,\dots,k_n}^{x,y_1,y_2,\dots,y_n}. \quad (\text{II.12})$$

Индексы p_i принимают любые значения из последовательности 1, 2, ..., n :

$$\begin{aligned} & \langle y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_m}, x^f(y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \\ & = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left\langle \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_n^{k_n}} \times \right. \\ & \times (y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_m}, f(y_1, y_2, \dots, y_n)) \left. \right\rangle_{x_1, k_1, k_2, \dots, k_n}^{x, y_1, y_2, \dots, y_n}. \quad (\text{II.13}) \end{aligned}$$

2. Стационарная совокупность случайных процессов $\{x(t), y(t)\}$ имеет произвольное вероятностное распределение

$$\begin{aligned} & \langle y x_{\tau} \Psi(x_{\tau}) \rangle = \langle x \Psi(x) \rangle \langle y \rangle + \langle \Psi + x \Psi' \rangle \langle y, x_{\tau} \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle 2\Psi' + x \Psi'' \rangle \langle y, x_{\tau}, x_{\tau} \rangle + \frac{1}{6} \langle 3\Psi'' + x \Psi''' \rangle \times \\ & \times \langle y, x_{\tau}, x_{\tau}, x_{\tau} \rangle + \dots, \\ & \langle x y_{\tau} \Psi(x_{\tau}) \rangle = \langle y \Psi(x) \rangle \langle x \rangle + \langle y \Psi' \rangle \langle x, x_{\tau} \rangle + \langle \Psi \rangle \langle x, y_{\tau} \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle y \Psi'' \rangle \langle x, x_{\tau}, x_{\tau} \rangle + \langle \Psi' \rangle \langle x, x_{\tau}, y_{\tau} \rangle + \\ & + \frac{1}{6} \langle y \Psi''' \rangle \langle x, x_{\tau}, x_{\tau}, x_{\tau} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Psi'' \rangle \langle x, x_{\tau}, x_{\tau}, y_{\tau} \rangle + \dots; \quad (\text{II.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle x x_{\tau}^2 \Psi(x_{\tau}) \rangle = \langle x^2 \Psi \rangle \langle x \rangle + \langle 2x \Psi + x^2 \Psi' \rangle \langle x, x_{\tau} \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle 2\Psi + 4x \Psi' + x^2 \Psi'' \rangle \langle x, x_{\tau}, x_{\tau} \rangle + \frac{1}{6} \langle 6\Psi' + 6x \Psi'' + x^2 \Psi''' \rangle \times \\ & \times \langle x, x_{\tau}, x_{\tau}, x_{\tau} \rangle + \dots \quad (\text{II.15}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle x_{\tau}, x \Psi(x_{\tau}) \rangle = \langle x, \Psi(x) \rangle \langle x \rangle + [\langle \Psi \rangle + \langle x, \Psi' \rangle] \langle x, x_{\tau} \rangle + \\ & + \frac{1}{2} [2 \langle \Psi' \rangle + \langle x, \Psi'' \rangle] \langle x, x_{\tau}, x_{\tau} \rangle + \frac{1}{6} [3 \langle \Psi'' \rangle + \langle x, \Psi''' \rangle] \times \\ & \times \langle x, x_{\tau}, x_{\tau}, x_{\tau} \rangle + \dots \quad (\text{II.16}) \end{aligned}$$

3. Случайные переменные x, y, z, w, u обладают совместным гауссовым распределением с нулевыми средними значениями

$$\begin{aligned} & \langle x^2, y^2 \rangle = 2 \langle x, y \rangle^2, \\ & \langle x^2, y^2, z^2 \rangle = 8 \langle x, y \rangle \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle, \\ & \langle x^2, y^2, z^2, w^2 \rangle = 16 \langle x, y \rangle \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle \langle z, w \rangle + \\ & + 16 \langle x, z \rangle \langle x, w \rangle \langle y, w \rangle \langle y, z \rangle + 16 \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle \times \\ & \times \langle z, w \rangle \langle x, w \rangle; \quad (\text{II.17}) \end{aligned}$$

$$\langle g(x) f(y) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle g^{(k)}(x) \rangle \langle f^{(k)}(y) \rangle \langle x, y \rangle^k; \quad (\text{II.18})$$

$$\langle x^2 f(y) \rangle = \frac{D_x D_y - \langle xy \rangle^2}{D_y} \langle f \rangle + \frac{\langle xy \rangle^2}{D_y^2} \langle y^2 f \rangle; \quad (\text{II.19})$$

$$\langle x, f(y) \rangle = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, f(y) \rangle,$$

$$\langle x, y, f(z) \rangle = \frac{\langle x, z \rangle \langle y, z \rangle}{\langle z, z \rangle^2} \langle z, z, f(z) \rangle; \quad (\text{II.20})$$

$$\langle xyzf(w) \rangle = \langle f'(w) \rangle 3 \{ \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle \}_s + \langle f'''(w) \rangle \langle x, w \rangle \langle y, w \rangle \langle z, w \rangle. \quad (\text{II.21})$$

В формуле (II.21) симметризация идет по x, y, z .

$$\langle xyzwf(u) \rangle = \langle f(u) \rangle 3 \{ \langle x, y \rangle \langle w, z \rangle \}_s + \langle f''(u) \rangle 6 \{ \langle x, u \rangle \langle y, u \rangle \times \\ \times \langle w, z \rangle \}_s + \langle f^{(4)}(u) \rangle \langle w, u \rangle \langle x, u \rangle \langle y, u \rangle \langle z, u \rangle. \quad (\text{II.22})$$

В формуле (II.22) симметризация идет по x, y, z, w .

$$\langle x, f(y)^{[k]} \rangle = k \langle f(y)^{[k-1]}, f'(y) \rangle \langle x, y \rangle, \quad (\text{II.23})$$

$$\langle x^{[k]}, f(y) \rangle = \langle f^{(k)}(y) \rangle \langle x, y \rangle^k, \quad (\text{II.24})$$

$$\langle x, y, f(z, w) \rangle = \langle f''_{zz} \rangle \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle + \langle f''_{ww} \rangle \langle x, w \rangle \langle y, w \rangle + \\ + \langle f''_{zw} \rangle [\langle x, w \rangle \langle y, z \rangle + \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle]. \quad (\text{II.25})$$

Приложение III. Кинетические коэффициенты марковских процессов

1. Если марковский случайный процесс задан дифференциальным уравнением, то отыскание его кинетических коэффициентов представляет самостоятельную и в общем случае довольно трудную задачу. Лишь в простейших частных случаях кинетические коэффициенты известны точно, чаще всего они вычисляются приближенно. При этом, как правило, кинетический коэффициент первого порядка находится во втором приближении, в то время как высшие кинетические коэффициенты записываются в первом приближении (см., например, [35]).

Пусть марковский процесс $x(t)$ задан дифференциальным уравнением

$$dx/dt = f[x, t, \xi], \quad (\text{III.1})$$

где $f[x, t, \xi]$ — ограниченная дифференцируемая функция, а $\xi = \xi(t)$ — стационарный совершенно случайный процесс с $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Тогда первый кинетический коэффициент равен

$$K_1(x, t) = \langle f[x, t, \xi] \rangle + \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \left(1 - \frac{u}{\tau} \right) K_{ff'}[x, t, u] du, \quad (\text{III.2})$$

где

$$K_{ff'}[x, t, v - u] \equiv \langle f[x, t, \xi(t + u)] f'_x[x, t, \xi(t + v)] \rangle.$$

Остальные кинетические коэффициенты равны

$$K_n(x, t) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \dots \int_0^\tau \alpha_n^f(x, t, u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n, \quad (\text{III.3})$$

где

$$\alpha_n^f(x, t, u_1, \dots, u_n) \equiv \langle f[x, t, \xi(t + u_1)] \cdot \dots \cdot f[x, t, \xi(t + u_n)] \rangle$$

есть моментная функция n -го порядка правой части (III.1).

Чтобы значения интегралов в (III.2), (III.3) были отличными от нуля, в состав моментных функций подынтегральных выражений должны входить дельта-функции. Так, если

$$K_{ff'}[x, t, u] = \mathcal{D}_1(x, t) \delta(u) + \text{гладкая функция } u, \\ \alpha_n^f(x, t, u_1, \dots, u_n) = \mathcal{D}_n(x, t) \delta(u_2 - u_1) \delta(u_3 - u_1) \cdot \dots \cdot \delta(u_n - u_1) + \text{гладкая функция } u_1, u_2, \dots, u_n,$$

то

$$K_1(x, t) = \langle f[x, t, \xi] \rangle + \frac{1}{2} \mathcal{D}_1(x, t), \\ K_n(x, t) = \mathcal{D}_n(x, t), \quad n \geq 2. \quad (\text{III.4})$$

2. Если марковский процесс $x(t)$ задан уравнением

$$dx/dt = a(x, t) + b(x, t) \xi(t),$$

где $a(x, t)$, $b(x, t)$ — ограниченные дифференцируемые функции, а $\xi(t)$ — дельта-процесс с кумулянтными функциями ($s \geq 2$)

$$\kappa_s(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_s) = \mathcal{D}_s \delta(\tau_2) \cdot \delta(\tau_3) \cdot \dots \cdot \delta(\tau_s),$$

то кинетические коэффициенты марковского процесса равны

$$K_1(x, t) = a(x, t) + \frac{1}{2} \mathcal{D}_2 b(x, t) \frac{\partial b(x, t)}{\partial x}, \\ K_n(x, t) = \mathcal{D}_n b^n(x, t), \quad n \geq 2. \quad (\text{III.5})$$

Если же $\xi(t)$ является гауссовым дельта-процессом, то

$$K_1(x, t) = a(x, t) + \frac{1}{2} \mathcal{D}_2 b(x, t) \frac{\partial b(x, t)}{\partial x}, \\ K_2(x, t) = \mathcal{D}_2 b^2(x, t), \\ K_3(x, t) = K_4(x, t) = \dots = 0. \quad (\text{III.6})$$

В этом случае мы приходим к непрерывному марковскому процессу, а значения кинетических коэффициентов (III.6) становятся точными.

3. Аналогичным образом находятся кинетические коэффициенты и для многомерных марковских процессов. Так, если двумерный марковский процесс $\{x(t), y(t)\}$ задан системой дифференциальных уравнений

$$dx/dt = a_1(x, y, t) + b_1(x, y, t) \xi(t) + c_1(x, y, t) \eta(t), \\ dy/dt = a_2(x, y, t) + b_2(x, y, t) \xi(t) + c_2(x, y, t) \eta(t),$$

где статистически независимые совершенно случайные процессы ξ и η имеют нулевые средние и обладают кумулянтными функциями

$$\kappa_s^\xi(0, \tau_2, \dots, \tau_s) = \mathcal{D}_s^\xi \delta(\tau_2) \cdot \dots \cdot \delta(\tau_s), \\ \kappa_s^\eta(0, \tau_2, \dots, \tau_s) = \mathcal{D}_s^\eta \delta(\tau_2) \cdot \dots \cdot \delta(\tau_s),$$

то можно получить следующие значения кинетических коэффициентов первого порядка:

$$K_x(x, y, t) = a_1(x, y, t) + \frac{\mathcal{D}_2^\xi}{2} [b_1(x, y, t) b'_{1x}(x, y, t) + \\ + b_2(x, y, t) b'_{1y}(x, y, t)] + \frac{\mathcal{D}_2^\eta}{2} [c_1(x, y, t) c'_{1x}(x, y, t) + \\ + c_2(x, y, t) c'_{1y}(x, y, t)],$$

$$\begin{aligned}
K_y(x, y, t) = & a_2(x, y, t) + \frac{\mathcal{D}_2^{\xi}}{2} [b_2(x, y, t) b_{2y}'(x, y, t) + \\
& + b_1(x, y, t) b_{2x}'(x, y, t)] + \frac{\mathcal{D}_2^{\eta}}{2} [c_2(x, y, t) c_{2y}'(x, y, t) + \\
& + c_1(x, y, t) c_{2x}'(x, y, t)];
\end{aligned}
\tag{III.7}$$

второго порядка:

$$\begin{aligned}
K_{xx}(x, y, t) = & \mathcal{D}_2^{\xi} b_1^2(x, y, t) + \mathcal{D}_2^{\eta} c_1^2(x, y, t), \\
K_{xy}(x, y, t) = & \mathcal{D}_2^{\xi} b_1(x, y, t) b_2(x, y, t) + \mathcal{D}_2^{\eta} c_1(x, y, t) c_2(x, y, t), \\
K_{yy}(x, y, t) = & \mathcal{D}_2^{\xi} b_2^2(x, y, t) + \mathcal{D}_2^{\eta} c_2^2(x, y, t);
\end{aligned}
\tag{III.8}$$

высших порядков:

$$\begin{aligned}
K_{\underbrace{xx\dots x}_n \underbrace{yy\dots y}_m}(x, y, t) = & \mathcal{D}_{n+m}^{\xi} b_1^n(x, y, t) b_2^m(x, y, t) + \\
& + \mathcal{D}_{n+m}^{\eta} c_1^n(x, y, t) c_2^m(x, y, t).
\end{aligned}
\tag{III.9}$$

Если совершенно случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ к тому же и гауссовы, то высшие кинетические коэффициенты обращаются в нуль, а выражения для кинетических коэффициентов первых двух порядков, представленные формулами (III.7), (III.8), становятся точными.

Список литературы

1. Бунимович В. И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М., «Сов. радио», 1951.
2. Лебедев В. Л. Случайные процессы в электрических и механических системах. М., Физматгиз, 1958.
3. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Пер. с англ. М., ИЛ, 1960.
4. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Гостехиздат, 1957.
5. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961.
6. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 1, т. 2. Пер. с англ. М., «Сов. радио», 1961, 1962.
7. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М., «Наука», 1966.
8. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Сов. радио», 1966.
9. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966.
10. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы. — «Автоматика и телемеханика», 1953, т. 14, № 2, с. 144—163.
11. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. — «Автоматика и телемеханика», 1953, т. 14, № 4, с. 375—391.
12. Thile T. N. Theory of Observations. London, 1903.
13. Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.
14. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М., «Наука», 1966.
15. Леонов В. П., Ширяев А. Н. К технике вычисления семинвариантов. — «Теория вероятностей и ее применения», 1959, т. 4, № 3, с. 342—355.
16. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Корреляционные функции в теории броуновского движения. Обобщение уравнения Фоккера—Планка. — ЖЭТФ, 1954, т. 26, вып. 2, с. 189—207.
17. Леонов В. П. Некоторые применения старших семинвариантов к теории стационарных случайных процессов. М., «Наука», 1964.
18. Лёзин Ю. С. О распределении случайных напряжений на выходе неогерентного накопительного устройства с экспоненциальной весовой функцией. — «Изв. вузов СССР. Радиотехника», 1960, № 6, с. 592—597.
19. Лёзин Ю. С. О распределении шума на выходе автокорреляционного устройства. — «Радиотехника», 1965, т. 20, № 3, с. 60—65.
20. Лёзин Ю. С. О связи между кумулянтами случайных напряжений на входе и выходе квадратичного устройства. — «Изв. вузов СССР. Радиотехника», 1965, т. 8, № 3, с. 346—348.
21. Дашевский М. Л., Липцер Р. Ш. Применение условных семинвариантов в задачах нелинейной фильтрации марковских процессов. — «Автоматика и телемеханика», 1967, № 6, с. 63—74.
22. Дашевский М. Л., Липцер Р. Ш. Приближенный анализ нелинейных нестационарных динамических систем. — «Автоматика и телемеханика», 1967, № 8, с. 32—43.
23. Дашевский М. Л. Приближенный анализ точности нестационарных нели-

- нейных систем методом семинвариантов. — «Автоматика и телемеханика», 1967, № 11, с. 62—81.
24. **Евланов Л. Г.** Методы анализа динамических систем, содержащих случайные параметры II. — «Автоматика и телемеханика», 1968, № 12.
 25. **Лёзин Ю. С.** Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. М., «Сов. радио», 1969.
 26. **Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И.** Квазимоментные функции в теории случайных процессов. — «Доклады АН СССР», 1954, т. 94, № 4, с. 615—618.
 27. **Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И.** Квазимоментные функции в теории случайных процессов. — «Теория вероятностей и ее применения», 1960, т. 5, № 1, с. 84—102.
 28. **Малахов А. Н.** Описание негауссовых переменных кумулянтными скобками. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1974, т. 17, № 11, с. 1736.
 29. **Малахов А. Н.** Анализ негауссовых марковских процессов методом кумулянтных скобок. — «Радиотехника и электроника», 1975, т. 20, № 1.
 30. **Малахов А. Н.** Уравнения нелинейного преобразования негауссовых случайных величин, процессов и полей. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1973, т. 16, № 8, с. 1287—1290.
 31. **Дубков А. А., Малахов А. Н.** Кумулянтный анализ функционального нелинейного преобразования негауссовых случайных процессов и полей. — «Доклады АН СССР», 1975, т. 222, № 4, с. 793—796.
 32. **Малахов А. Н.** Кинетические уравнения кумулянтов марковского процесса. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1976, т. 19, № 1.
 33. **Малахов А. Н.** Кинетические уравнения двумерных кумулянтных функций марковского процесса. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1976, т. 19, № 2, с. 214—223.
 34. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1969.
 35. **Малахов А. Н.** Флуктуации в автоколебательных системах. М., «Наука», 1968.
 36. **Дубков А. А., Малахов А. Н.** Свойства и взаимосвязи кумулянтов случайной переменной. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1976, т. 19, № 8.
 37. **Яглом А. М.** Введение в теорию стационарных случайных функций. — «Успехи математических наук», 1952, т. 7, вып. 5 (51), с. 3—168.
 38. **Крамер Г., Лидбеттер М.** Стационарные случайные процессы. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
 39. **Леви П.** Стохастические процессы и броуновское движение. Пер. с франц. М., «Наука», 1972.
 40. **Хинчин А. Я.** Теория корреляции стационарных стохастических процессов. — «Успехи математических наук», 1938, т. 5, вып. 5, с. 42—51.
 41. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. с англ. М., «Наука», 1970.
 42. **Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.** Теория вероятностей. М., «Наука», 1967.
 43. **Brown J. L.** A generalized form of Price's theorem and its converse. — «IEEE Trans.», 1967, v. IT-13, № 1, p. 27—30.
 44. **Brown J. L.** On a cross-correlation property for stationary random processes. — «IRE Trans.», 1957, v. IT-3, № 1, p. 28—31.
 45. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. Пер. с англ. М., «Наука», 1969.
 46. **Bowen B. A.** An alternate proof of central limit theorem for sums of independent processes. — «Proc. IEEE», 1966, v. 54, № 6, p. 878—879.
 47. **Price R. A.** A useful theorem for nonlinear devices having Gaussian inputs. — «IRE Trans.», 1958, v. IT-4, № 2, p. 69—72.
 48. **McMahon E. L.** An extension of Price's theorem. — «IEEE Trans.», 1964, v. IT-10, № 2, p. 168.
 49. **Papoulis A.** Comment on «an extension of Price's theorem». — «IEEE Trans.», 1965, v. IT-11, № 1, p. 154.
 50. **Marcinkewicz J.** Sur une propriété de la loi de Gauss. — «Math. Zeitschr.», 1938, v. 44, H. 4, s. 612—618.

51. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. Пер. с англ. М., ИЛ, 1956.
52. Зачепацкая Л. П. О возможной некорректности замены асимптотически нормальных случайных процессов строго нормальными при инерционном линейном преобразовании. — «Радиотехника и электроника», 1971, т. 16, № 4, с. 627—630.
53. Райс С. Теория флуктуационных шумов. — В кн.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Пер. с англ. М., ИЛ, 1953.
54. Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. М., ИЛ, 1958.
55. Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение. Сб. статей. М., ОНТИ, 1936.
56. Миллиончиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. — «Доклады АН СССР», 1941, т. 32, № 9, с. 611—614.
57. Болотин В. В., Москвин В. Г. О параметрических резонансах в стохастических системах. — «Изв. АН СССР. Механика твердого тела», 1972, № 4, с. 88—94.
58. Зачепацкая Л. П. О возможной денормализации случайных процессов некоторыми инерционными линейными системами. — «Радиотехника и электроника», 1968, т. 13, № 8, с. 1452—1455.
59. Боброва Л. П., Зачепацкая Л. П., Созинов И. Н. О денормализации случайных процессов в дисперсионной линейной системе. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1971, т. 14, № 1, с. 105—113.
60. Ширман Я. Д., Голиков В. Н. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. М., «Сов. радио», 1963.
61. Кук Ч., Барнфельд М. Радиолокационные сигналы. Пер. с англ. М., «Сов. радио», 1971.
62. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ. М., «Сов. радио», 1965.
63. Бочков Г. Н., Малахов А. Н. О приближенном представлении функции корреляции после нелинейного преобразования. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1974, т. 17, № 5, с. 693—698.
64. Boersma S. L. Statistics of laser radiation. — «Proc. IEEE», 1966, v. 54, № 8.
65. Клячкин В. И., Татарский В. И. Статистические средние в динамических системах. — «Теоретическая и математическая физика», 1973, т. 17, № 2, с. 273—282.
66. Бочков Г. Н., Дубков А. А. К корреляционному анализу нелинейных стохастических функционалов. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1974, т. 17, № 3, с. 376—382.
67. Параев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М., «Сов. радио», 1976.
68. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1962.
69. Казаков И. Е. Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных систем. — «Автоматика и телемеханика», 1956, т. 17, № 5, 383—409.
70. Kramers H. A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. — «Physica», 1940, v. 7, № 4, p. 284—304.
71. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. Пер. с англ. М., ИЛ, 1947.
72. Caughey T. K., Dienes J. K. Analysis of a nonlinear first order system with a white noise input. — «J. Appl. Phys.», 1961, v. 32, № 11, p. 2476.
73. Саичев А. И. О нахождении временных характеристик марковских процессов. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1974, т. 17, № 6, с. 864.
74. Kubo R. Generalized cumulant expansion method. — «J. Phys. Soc. of Japan», 1962, v. 17, № 7, p. 1100—1120.
75. Van Kampen N. G. A cumulant expansion for stochastic linear differential equations. — «Physica», 1974, v. 74, № 2, p. 215—247.
76. Fox R. F. Application of cumulant techniques to multiplicative stochastic processes. — «J. Math. Phys.», 1974, v. 15, № 9, p. 1479—1483.
77. Fox R. F. A generalized theory of multiplicative stochastic processes using cumulant techniques. — «J. Math. Phys.», 1975, v. 16, p. 289

Предметный указатель

- Асимметрия 12, 41
- Бохнера — Хинчина теорема 10
- Вероятность переходов 156
- Винера — Хинчина соотношение 132
- Времена статистической зависимости 107, 117, 123
- Время
корреляции 107, 118
— линейной системы 202
релаксации кумулянтов 313
— линейной системы 199, 202
- Вынужденное движение линейной системы 198
- Гауссов случайный процесс 107
- Дельта-процесс 123
- Денормализация 229 233
- Дифференцирование
кумулянтных скобок 147
— — неполных 51
моментных скобок 147
- Игольчатая функция 120
- Изоковарианта 118, 122
- Индекс шума 343
- Квазимоменты 13
- Кинетические операторы марковского процесса 159, 183
- Кинетические уравнения
кумулянтных функций 177, 191
кумулянтов 169
марковского процесса 159
- Ковариационная функция 104, 111, 120
- Ковариационные ряды 253
- Ковариация 14, 16, 18
- Когерентность 134
- Корреляционная функция 104, 111
линейной системы 201
- Корреляция 14, 16, 18
линейная 17
- Коши — Буняковского неравенство 17
- Кумулянтная инвариантность 66, 155, 210
- Кумулянтные диаграммы 34, 105, 109
— коэффициенты 12, 34
— скобки 23, 27, 50
— — неполные 47, 51
— уравнения 54, 73, 83
— функции 102, 109, 114, 131, 205, 209
— — нормированные 105, 113
- Кумулянты 11, 15, 28, 40, 44
- Коэффициент передачи линейной системы 201
- Коэффициенты интенсивности 123
- Коэффициенты кинетические 159, 366
- Линдберга — Леви теорема 70
- Локальное приращение случайного процесса 162
- Марковский процесс 156
однородный во времени 157
— в пространстве 161, 171
стационарный 157
- Марцинкевича теорема 90
- Матрица
ковариационная 30, 65, 112, 129
корреляционная 65, 112, 129
спектральная 133
- Мера статистической связи 33, 105
- Модельные распределения 88, 94
- Моментные скобки 24
— функции 101, 109, 114, 131, 205, 209
— — линейной системы 203, 208
- Моменты 8, 14, 22
- Неравенство треугольника 18
- Нормализация 167, 170, 188, 225, 232
- Переходная функция линейной системы 198
- Положительно определенная функция 10
- Полоса
линейной системы 203
нелинейной инерционной системы 303, 328, 333
- Прайса теорема 247, 287
- Приближения
гауссово 94, 194
эксцессное 94, 194
высших порядков 94
модельные 94, 182
- Производная случайного процесса 142
локальная 163
- Пуассоновский случайный процесс 124, 222
- Размыкание кумулянтных скобок 38, 82, 130, 363
— моментных скобок 61, 130, 363
- Распределение
бинарной альтернативы 43, 46
гауссово 12, 108
границное 43, 46
каноническая форма 53
эксцессное 89, 94
- Собственное движение линейной системы 198
- Совершенно случайный процесс 100, 120
- Согласованный фильтр 230
- Скобки симметризации 25, 37
- Случайный процесс 99
дельта-коррелированный 120
Смолуховского уравнение 158
- Спектральная плотность 132, 136, 141
- Спектры случайного процесса 132, 233
— высших порядков 135, 239
- Спектр энергии 202
- Статистическая зависимость 16, 31
- Статистическое среднее 8
- Стационарная связанность процессов 126
- Стационарность сильная 114
слабая 114
- Стохастический предел 142, 154
- Телеграфный сигнал 124, 257, 265
- Треугольная функция 120
- Уравнение ЭФП 160
- Условие квазистатичности 340, 351
— широкополосности 339, 350
- Функция
корреляции первого рода 201
— второго рода 267
характеристическая 10, 22, 100
эксцессная 105
- Частотные характеристики линейной системы 204, 237
- Центральная предельная теорема теории вероятностей 69
- Эджворта ряд 13, 97
- Эксцесс 12, 41

Оглавление

Предисловие	5
Введение	6
 Раздел I.	
Кумулянтное описание случайных величин	8
Глава 1. Кумулянты	8
1.1. Моментное представление случайной величины	8
1.2. Кумулянты	11
1.3. Моменты и кумулянты двумерного распределения	14
1.4. Статистическая зависимость и корреляция	16
1.5. Некоторые двумерные распределения	18
1.6. Моменты и кумулянты многомерного распределения	21
Глава 2. Кумулянтные скобки и диаграммы	23
2.1. Кумулянтные скобки	23
2.2. Взаимосвязь кумулянтных и моментных скобок	24
2.3. Свойства кумулянтных скобок	27
2.4. Статистический смысл кумулянтов	31
2.5. Кумулянтные диаграммы	34
2.6. Свойства кумулянтов одномерного распределения	40
2.7. Свойства совместных кумулянтов	44
2.8. Неполные кумулянтные скобки	47
Глава 3. Кумулянтные уравнения	53
3.1. Дифференциальные уравнения вероятностного распределения	53
3.2. Кумулянтные уравнения	54
3.3. Обобщения на многомерные распределения	58
3.4. Размыкание моментных скобок	61
Глава 4. Кумулянтный анализ преобразования случайных величин	64
4.1. Постановка задачи	64
4.2. Линейные преобразования	65
4.3. Суммы случайных величин	68
4.4. Центральная предельная теорема	69
4.5. Нелинейные преобразования	71
4.6. Нелинейные преобразования гауссовых переменных	76
4.7. Размыкание кумулянтных скобок	82
Глава 5. Модельные распределения	88
5.1. Определения	88
5.2. Особенности модельных распределений	89
5.3. Модельные приближения	93
5.4. Экспоненциальное распределение	94

Раздел II.

Кумулянтное описание случайных процессов	99
Глава 6. Кумулянтные функции	99
6.1. Основные определения	99
6.2. Моментные и кумулянтные функции	100
6.3. Временные характеристики случайного процесса	105
6.4. Гауссов случайный процесс	107
6.5. Совокупность случайных процессов	108
Глава 7. Стационарные случайные процессы	112
7.1. Особенности стационарного процесса	112
7.2. Свойства кумулянтных функций	116
7.3. Времена статистической зависимости	117
7.4. Примеры кумулянтных функций негауссовых процессов	120
7.5. Стационарная совокупность двух процессов	126
7.6. Стационарные векторные процессы	129
7.7. Формулы размыкания моментных и кумулянтных скобок для совокупности двух процессов	129
Глава 8. Спектры случайных процессов	132
8.1. Спектральная плотность	132
8.2. Спектральные матрицы	133
8.3. Спектры высших порядков	135
Глава 9. Производная и интеграл от случайного процесса	142
9.1. Производная случайного процесса	142
9.2. Моментные и кумулянтные функции производных	143
9.3. О дифференцируемости случайного процесса	148
9.4. Спектральные характеристики производных	150
9.5. Интеграл от случайного процесса	154
Глава 10. Марковские процессы	156
10.1. Определение марковского процесса	156
10.2. Уравнение Смолуховского	157
10.3. Кинетические уравнения марковского процесса	158
10.4. Свойства приращений марковского процесса	161
10.5. Дифференциальное уравнение марковского процесса	163
10.6. Эволюция кумулянтов	165
10.7. Эволюция моментных функций	172
10.8. Кинетические уравнения кумулянтных функций	175
10.9. Кинетические уравнения многомерного марковского процесса	182
10.10. Уравнения кумулянтов многомерного марковского процесса	184
10.11. Кинетические уравнения кумулянтных функций много- мерного марковского процесса	189

Раздел III.

Линейные преобразования случайных процессов	197
Глава 11. Линейные системы	197
11.1. Представление линейной системы	197
11.2. Моментные функции и частотные характеристики линей- ной системы	201

Глава 12. Преобразование кумулянтных и моментных функций	205
12.1. Преобразование кумулянтных функций	209
12.2. Преобразование кумулянтных функций дифференцирующей системой	209
12.3. Пример линейного преобразования негауссова процесса	211
12.4. Дифференциальные уравнения моментных и кумулянтных функций	216
12.5. Суперпозиция негауссовых процессов	220
12.6. Преобразование пуассоновского процесса	222
12.7. Нормализация негауссова распределения	225
12.8. Эффект денормализации процесса инерционной системой	229
Глава 13. Преобразование спектров	233
13.1. Спектры суперпозиции	233
13.2. Преобразование спектров дифференцирующей системой	235
13.3. Преобразование спектров инерционной системой	237
Раздел IV.	
Нелинейные преобразования случайных процессов	240
Глава 14. Безынерционные нелинейные преобразования	240
14.1. Постановка задачи	240
14.2. Преобразование характеристик одномоментного распределения	241
14.3. Преобразование характеристик двумоментного распределения	244
14.4. Взаимосвязь ковариационных функций	247
14.5. Примеры нелинейного преобразования негауссовых процессов	249
14.6. Гауссов входной шум. Ковариационные ряды	253
14.7. Преобразование спектров негауссовых процессов	260
14.8. Преобразование спектров нестационарных процессов	267
14.9. Парадокс нелинейного взаимодействия спектральных компонент	271
14.10. Преобразование спектров гауссовых шумов	275
14.11. Связь параметров многомоментных распределений	284
14.12. Нелинейные преобразования гауссовой совокупности	286
14.13. Неявные нелинейные преобразования	289
14.14. Безынерционное детектирование с обратной связью	294
Глава 15. Инерционные нелинейные преобразования белых шумов	297
15.1. Постановка задачи. Метод исследования	297
15.2. Гауссово приближение	300
15.3. Эксцессное приближение	304
15.4. Инерционная система с кубической нелинейностью. Установление кумулянтов	307
15.5. Инерционная система с кубической нелинейностью. Спектры	316
15.6. Броуновское движение в потенциальных полях	321
15.7. Спектры негауссова броуновского движения	327
Глава 16. Инерционные нелинейные преобразования марковских процессов	333
16.1. Постановка задачи	333
16.2. Гауссово приближение	334
16.3. Условия широкополосности и квазистатичности воздействия	338
16.4. Инерционная система с кубической нелинейностью	342

16.5. Структура высших кумулянтов	347
16.6. Учет эксцессного приближения	351
16.7. Инерционное детектирование шума	357
Приложение I. Некоторые статистические средние	362
Приложение II. Формулы размыкания моментных и кумулянтных скобок	363
Приложение III. Кинетические коэффициенты марковских процессов	366
Список литературы	369
Предметный указатель	372

ИБ № 324

Аскольд Николаевич Малахов

**Кумулянтный анализ
случайных негауссовых процессов
и их преобразований**

Редактор И. К. Г а н и н

Художественный редактор А. Н. Алтунин

Технический редактор А. А. Белоус

Корректор Л. А. Максимова

Сдано в набор 29.11.77. Подписано в печать 05.05.78. Т-10405

Формат 60×90/16 Бумага типографская № 1

Литературная гарн. Высокая печать.

Объем 23,5 усл. п. л., 23,4 уч.-изд. л.

Тираж 4200 экз. Зак. 2181. Цена 3 р. 60 к.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома

при Государственном комитете Совета Министров СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

Москва, И-41, Б. Переяславская, 46